

Fibrati Vettoriali sulle Curve

Francesco Bottacin

Febbraio 1996

Indice

1	Fibrati Vettoriali	1
1.1	Definizioni	1
1.2	Funzioni di transizione	2
1.3	Omomorfismi di fibrati vettoriali	3
1.4	Operazioni sui fibrati vettoriali	4
1.5	Sottofibrati e fibrati quoziente	6
1.6	Rialzamento di fibrati	8
1.7	Sezioni di fibrati	9
1.8	Fibrati vettoriali e fasci localmente liberi	9
1.9	Complementi	10
2	Classificazione topologica	13
2.1	Definizioni	13
2.2	Fibrati vettoriali su uno spazio contrattile	15
2.3	Incollamento di fibrati vettoriali	17
2.4	Superficie di Riemann	19
2.5	Fibrati vettoriali sulle superficie di Riemann	21
2.6	Osservazioni finali	23
3	Classificazione algebrica	25
3.1	Fibrati in rette e divisori	25
3.2	Fibrati in rette su una curva	26
3.3	Fibrati vettoriali sulla retta proiettiva	28
3.4	Famiglie limitate	32
3.5	Stabilità	33
3.6	La filtrazione di Harder–Narasimhan	34
3.7	La filtrazione di Jordan–Hölder	36
3.8	Spazi di moduli: definizioni	41
3.9	Fibrati vettoriali sulle curve: il caso generale	46

3.10 Studio infinitesimale degli spazi di moduli	55
3.11 Fibrati vettoriali sulle curve ellittiche	57
A Estensioni di fasci	59
B Spazi di moduli	63
C Geometria invariante	69
D Schemi “Quot”	76
Bibliografia	78
Indice analitico	81

Capitolo 1

Fibrati Vettoriali

1.1 Definizioni

In questa sezione, salvo ove espressamente indicato, il termine *varietà* indicherà indifferentemente una varietà topologica¹, differenziabile, olomorfa oppure una varietà algebrica, definita sul corpo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Per semplicità supporremo sempre che le varietà siano connesse. Un *morfismo* tra due varietà sarà allora una mappa nella categoria opportuna (cioè un'applicazione continua nel caso di varietà topologiche, di classe C^∞ nel caso di varietà differenziabili, etc.)

Definizione 1.1. Un fibrato vettoriale (complesso) su una varietà X è il dato di una varietà E e di un morfismo suriettivo $\pi : E \rightarrow X$ di varietà, tale che, per ogni $x \in X$,

- (i) la *fibra* $E_x = \pi^{-1}(x)$ è uno spazio vettoriale complesso;
- (ii) esiste un intorno aperto $U \subset X$ di x ed un isomorfismo

$$\phi : E|_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^r,$$

tale che lo spazio vettoriale E_x venga inviato, in modo isomorfo, su $\{x\} \times \mathbb{C}^r$, per ogni $x \in U$.

Una tale mappa ϕ è detta una *trivializzazione* di E sull'aperto U . La dimensione (costante, dato che X è connessa) delle fibre di E è detta il *rango*

¹Più in generale, ciò che diremo vale per uno spazio topologico paracompatto, cioè uno spazio topologico separato in cui ogni ricoprimento aperto ammette un raffinamento localmente finito (si veda, ad esempio, [8]).

di E , ed indicata con $\text{rk}(E)$. Un fibrato vettoriale di rango 1 è detto *fibrato in rette*. Il fibrato $\pi : X \times \mathbb{C}^r \rightarrow X$, ove π indica la proiezione canonica, è detto *triviale*.

1.2 Funzioni di transizione

Sia $\pi : E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale su una varietà X . In corrispondenza a due trivializzazioni

$$\phi_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r$$

e

$$\phi_j : E|_{U_j} \rightarrow U_j \times \mathbb{C}^r$$

di E sugli aperti U_i e U_j rispettivamente, si ottiene, sull'intersezione $U_{ij} = U_i \cap U_j$ un isomorfismo

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : U_{ij} \times \mathbb{C}^r \rightarrow U_{ij} \times \mathbb{C}^r$$

della forma $(x, v) \mapsto (x, g_{ij}(x)v)$, ove

$$g_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^r)$$

è un morfismo di varietà.

Le funzioni g_{ij} si chiamano *funzioni di transizione* per E . Esse soddisfano evidentemente le seguenti identità:

$$(1.1) \quad g_{ij}(x) \cdot g_{ji}(x) = 1, \quad \forall x \in U_{ij},$$

$$(1.2) \quad g_{ik}(x) = g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x), \quad \forall x \in U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Supponiamo ora che sia dato un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di X ed una famiglia di morfismi

$$g_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^r),$$

che soddisfi alle identità (1.1) e (1.2). È facile verificare che esiste un unico fibrato vettoriale E di rango r su X che ammette le g_{ij} come funzioni di transizione. Per costruirlo è sufficiente porre

$$E|_{U_i} = U_i \times \mathbb{C}^r$$

ed incollare $E|_{U_i}$ e $E|_{U_j}$ lungo U_{ij} mediante g_{ij} . Precisamente, si definisce E come il quoziente di

$$\bigsqcup_{i \in I} (U_i \times \mathbb{C}^r)$$

per la più fine tra le relazioni di equivalenza che identifica i punti $(x, v) \in U_j \times \mathbb{C}^r$ e $(x', v') \in U_i \times \mathbb{C}^r$ se $x' = x$ e $v' = g_{ij}(x)v$. Dotando questo insieme della topologia quoziente, si ha una proiezione continua

$$\pi : E \rightarrow X$$

e degli omeomorfismi

$$E|_{U_i} \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}^r,$$

per ogni $i \in I$. Si può allora definire una struttura di varietà sullo spazio topologico quoziente E trasportando la struttura di varietà di $U_i \times \mathbb{C}^r$. Si noti come, al disopra di U_{ij} , le strutture di varietà ottenute a partire da $U_i \times \mathbb{C}^r$ e $U_j \times \mathbb{C}^r$ coincidano. Allo stesso modo si può trasportare la struttura di spazio vettoriale sulle fibre. Ancora, la struttura di $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale ottenuta su una fibra E_x non dipende da i .

1.3 Omomorfismi di fibrati vettoriali

Siano $\pi : E \rightarrow X$ e $\pi' : E' \rightarrow X$ due fibrati vettoriali su X , di ranghi r ed r' rispettivamente. Un *omomorfismo* di fibrati vettoriali da E a E' è un morfismo di varietà

$$f : E \rightarrow E',$$

tale che $\pi' \circ f = \pi$ e che, per ogni $x \in X$, l'applicazione indotta sulle fibre

$$f_x : E_x \rightarrow E'_x$$

sia un omomorfismo di $\mathbb{C}$ -spazi vettoriali.

Se $\phi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^r$ e $\phi' : E'|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^{r'}$ sono delle trivializzazioni di E ed E' al di sopra dello spesso aperto U di X , il morfismo

$$\tilde{f} = \phi' \circ f \circ \phi^{-1} : U \times \mathbb{C}^r \rightarrow U \times \mathbb{C}^{r'}$$

è detto l'espressione (locale) di f nelle trivializzazioni ϕ e ϕ' , ed è della forma

$$(x, v) \mapsto (x, g(x)v),$$

ove $g : U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^{r'})$ è un morfismo di varietà.

Un omomorfismo f di fibrati vettoriali è un *isomorfismo* se f_x è un isomorfismo, per ogni $x \in X$. Un fibrato vettoriale E è detto *triviale* se è isomorfo al fibrato vettoriale triviale $X \times \mathbb{C}^r$.

Proposizione 1.2. *Sia $f : E \rightarrow E'$ un omomorfismo di fibrati vettoriali su X . Se esiste un punto $x_0 \in X$ tale che f_{x_0} sia invertibile, allora esiste un intorno aperto U di x_0 tale che $f|_U : E|_U \rightarrow E'|_U$ sia un isomorfismo.*

Dimostrazione. È sufficiente verificarlo per l'espressione locale di f . L'ipotesi significa che $g(x_0)$ è invertibile. Dato che g è continua, $g(x)$ rimane invertibile su tutto un intorno U di x_0 . Ciò permette di costruire l'inversa di $f|_U$. $\square$

1.4 Operazioni sui fibrati vettoriali

In generale si può affermare che le operazioni sugli spazi vettoriali inducono analoghe operazioni sui fibrati vettoriali. Dati, ad esempio, due fibrati vettoriali E ed F su X , di rango r ed s rispettivamente, la *somma diretta* $E \oplus F$ di E e F è definita, insiemisticamente, ponendo

$$E \oplus F = \bigsqcup_{x \in X} (E_x \oplus F_x).$$

Per definire una struttura di varietà su questo insieme si scelgano delle trivializzazioni di E ed F su un aperto U_i ,

$$\phi_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r, \quad \psi_i : F|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^s.$$

Si utilizzino quindi le biiezioni

$$(E \oplus F)|_{U_i} \rightarrow U_i \times (\mathbb{C}^r \oplus \mathbb{C}^s)$$

associate a ϕ_i e ψ_i per definire una struttura di varietà su $E \oplus F$. Per verificare che questa struttura è indipendente dalla scelta delle trivializzazioni, è sufficiente calcolare le funzioni di transizione per $E \oplus F$. Si verifica immediatamente che tali funzioni di transizione sono le funzioni

$$k_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^r \oplus \mathbb{C}^s)$$

determinate dalla matrice

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix},$$

ove (g_{ij}) e (h_{ij}) sono le funzioni di transizione di E ed F rispettivamente.

In modo del tutto simile si possono costruire il fibrato *prodotto tensoriale* $E \otimes F$, la *potenza esterna* $\wedge^t E$, la *potenza simmetrica* $S^t E$, il fibrato *duale* E^* ed il fibrato $\mathcal{H}om(E, F)$.

Per quanto riguarda le funzioni di transizione, si dimostra facilmente che:

- $E \otimes F$ è definito dalle funzioni di transizione

$$k_{ij}(x) = g_{ij}(x) \otimes h_{ij}(x) \in \text{GL}(\mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^s);$$

- $\wedge^t E$ è definito dalle funzioni di transizione

$$k_{ij}(x) = \wedge^t g_{ij}(x) \in \text{GL}(\wedge^t \mathbb{C}^r).$$

- $S^t E$ è definito dalle funzioni di transizione

$$k_{ij}(x) = S^t g_{ij}(x) \in \text{GL}(S^t \mathbb{C}^r).$$

- E^* è definito dalle funzioni di transizione

$$k_{ij}(x) = {}^t g_{ij}(x)^{-1} \in \text{GL}(\mathbb{C}^r).$$

Si noti che, se E ha rango r , $\wedge^r E$ ha rango 1 ed è definito dalle funzioni di transizione

$$k_{ij}(x) = \det g_{ij}(x) \in \mathbb{C}^*.$$

Il fibrato in rette $\wedge^r E$ è detto il *fibrato determinante* di E , indicato anche con $\det E$. Vale inoltre il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione:

Teorema 1.3. *Siano E, F e G dei fibrati vettoriali su X . Si hanno i seguenti isomorfismi:*

$$\begin{aligned} (E \oplus F) \oplus G &\cong E \oplus (F \oplus G), & E \oplus F &\cong F \oplus E, \\ (E \otimes F) \otimes G &\cong E \otimes (F \otimes G), & E \otimes F &\cong F \otimes E, \\ (E \oplus F) \otimes G &\cong (E \otimes G) \oplus (F \otimes G), \\ (E \oplus F)^* &\cong E^* \oplus F^*, & (E \otimes F)^* &\cong E^* \otimes F^*, \\ \mathcal{H}om(E, F) &\cong E^* \otimes F, & (E^*)^* &\cong E. \end{aligned}$$

Inoltre, per ogni i con $0 \leq i \leq r = \text{rk}(E)$, si ha:

$$\begin{aligned} (\wedge^i E)^* &\cong \wedge^i (E^*), \\ \wedge^r (E^*) \otimes \wedge^i E &\cong \wedge^{r-i} (E^*). \end{aligned}$$

1.5 Sottofibrati e fibrati quoziente

Sia $\pi : E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale di rango r su una varietà X . Un *sottofibrato* F di E è una sottovarietà di E tale che la mappa indotta

$$\pi|_F : F \rightarrow X$$

renda F un fibrato vettoriale su X .

Sia F un sottofibrato di E . Consideriamo la famiglia di spazi vettoriali, parametrizzata da X ,

$$E/F = \bigsqcup_{x \in X} E_x/F_x.$$

Si osservi che ogni omomorfismo di fibrati vettoriali $f : E \rightarrow G$ che si annulla su F si fattorizza in modo unico attraverso un'applicazione $\bar{f} : E/F \rightarrow G$. Si ha allora il seguente risultato:

Proposizione 1.4. *Esiste un'unica struttura di fibrato vettoriale su $E/F \rightarrow X$ che soddisfa alla proprietà universale seguente: per ogni omomorfismo di fibrati vettoriali $f : E \rightarrow G$ che si annulla su F , l'applicazione indotta $\bar{f}$ è un omomorfismo di fibrati vettoriali.*

Dimostrazione. Sia x un punto di X . Su un opportuno intorno aperto U di x è possibile trovare un sottofibrato vettoriale S di $E|_U$ tale che si abbia $F_x \oplus S_x = E_x$. L'omomorfismo canonico di fibrati vettoriali

$$F|_U \oplus S \rightarrow E|_U$$

è dunque un isomorfismo al di sopra del punto x e quindi anche su tutto un intorno aperto V di x , in base alla Proposizione 1.2. Se ne deduce che esiste una biiezione

$$h : S|_V \rightarrow (E/F)|_V$$

compatibile con la struttura di spazio vettoriale delle fibre. Tramite questa mappa si può allora definire su E/F una struttura di fibrato vettoriale. Si verifica facilmente che la struttura così definita è indipendente, all'intorno di x , dalla scelta di S . Il fatto che questa struttura soddisfi la proprietà universale enunciata deriva dal fatto che $\bar{f} \circ h$ è la restrizione di f a $S|_V$ ed è pertanto un omomorfismo di fibrati vettoriali. $\square$

Il fibrato vettoriale E/F è il *fibrato quoziente* di E modulo F .

Osservazione 1.5. Sia F un sottofibrato di E . Dalle definizioni precedenti discende che, per ogni $x \in X$, esiste un intorno aperto U di x ed una trivializzazione

$$\phi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^r,$$

tale che

$$\phi|_F : F|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^s \subset U \times \mathbb{C}^r.$$

Le funzioni di transizione di E rispetto a tali trivializzazioni sono allora del tipo

$$g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} h_{ij}(x) & k_{ij}(x) \\ 0 & l_{ij}(x) \end{pmatrix},$$

ove le h_{ij} sono le funzioni di transizione del sottofibrato F e le l_{ij} sono quelle del fibrato quoziente E/F .

Se $f : E \rightarrow F$ è un omomorfismo di fibrati vettoriali, si pone

$$\text{Ker } f = \bigsqcup_{x \in X} \text{Ker } f_x$$

e

$$\text{Im } f = \bigsqcup_{x \in X} \text{Im } f_x.$$

Si noti che $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$ non sono, in generale, dei fibrati vettoriali. Si ha infatti:

Proposizione 1.6. *Sia $f : E \rightarrow F$ un omomorfismo di fibrati vettoriali. Allora il nucleo $\text{Ker } f$ e l'immagine $\text{Im } f$ sono sottofibrati vettoriali, rispettivamente di E ed F , se e solo se il rango di f_x è costante al variare di $x \in X$.*

Dimostrazione. La necessità della condizione è evidente. Per il viceversa, osserviamo che il problema è locale su X . Sia dunque x un punto di X e scegliamo, su un opportuno intorno aperto U di x , dei sottofibrati K e S di $E|_U$, L e T di $F|_U$, tali che

$$K_x = \text{Ker } f_x, \quad L_x = \text{Im } f_x$$

e che

$$E|_U = K \oplus S, \quad F|_U = L \oplus T.$$

Rispetto a queste decomposizioni, l'omomorfismo f si scrive nella forma

$$f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Nel punto x gli omomorfismi a , c e d si annullano, mentre b è invertibile. In base alla Proposizione 1.2, $b : S \rightarrow L$ è un isomorfismo in tutto un intorno di x . Il nucleo di f è allora costituito dalle coppie $(u, v) \in K \oplus S$ tali che

$$\begin{cases} (c - db^{-1}a)u = 0 \\ v = -b^{-1}au. \end{cases}$$

Ne risulta che l'omomorfismo $c - db^{-1}a$ ha rango costante, ed è quindi nullo in tutto l'intorno di x , dato che lo è in x . L'isomorfismo

$$(u, v) \mapsto (u, v + b^{-1}au)$$

invia dunque il nucleo di f nel primo addendo della somma diretta, dimostrando così che $\text{Ker } f$ è un sottofibrato vettoriale di E .

Analogamente, l'immagine di f si identifica con l'insieme delle coppie $(\xi, \eta) \in L \oplus T$ tali che $\eta = db^{-1}\xi$, e l'isomorfismo

$$(\xi, \eta) \mapsto (\xi, \eta - db^{-1}\xi)$$

invia l'immagine di f nel primo addendo della somma diretta. Di conseguenza anche $\text{Im } f$ è un fibrato vettoriale. $\square$

Corollario 1.7. *Sia $f : E \rightarrow F$ un omomorfismo di fibrati vettoriali. Se f è suriettivo, $\text{Ker } f$ è un sottofibrato vettoriale di E ; se f è iniettivo, $\text{Im } f$ è un sottofibrato vettoriale di F .*

1.6 Rialzamento di fibrati

Sia $\pi : E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale su X e sia $f : Y \rightarrow X$ un morfismo di varietà. Il *rialzamento* (in inglese, pull-back) f^*E di E è il fibrato vettoriale su Y definito da $f^*E = Y \times_X E$,

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

A livello delle fibre si ha:

$$(f^*E)_y = E_{f(y)},$$

e, se $\phi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^r$ è una trivializzazione di E in un intorno di $f(y)$, allora

$$f^*\phi : f^*E|_{f^{-1}(U)} \rightarrow f^{-1}(U) \times \mathbb{C}^r$$

è una trivializzazione di f^*E in un intorno di y . Le funzioni di transizione di f^*E sono, ovviamente, il rialzamento di quelle di E .

1.7 Sezioni di fibrati

Sia $\pi : E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale su una varietà X . Una *sezione* σ di E su un aperto V di X è un morfismo

$$\sigma : V \rightarrow E,$$

tale che $\sigma(x) \in E_x$, per ogni $x \in X$, ossia tale che $\pi \circ \sigma = \text{id}_V$.

Se $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di X e

$$\phi_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r$$

sono delle trivializzazioni di E , le funzioni

$$\sigma_i = \phi_i \circ \sigma : V \cap U_i \rightarrow (V \cap U_i) \times \mathbb{C}^r$$

sono del tipo

$$x \mapsto (x, s_i(x)).$$

Se (g_{ij}) sono le funzioni di transizione per E , si verifica subito che le funzioni s_i verificano le identità

$$(1.3) \quad s_i(x) = g_{ij}(x)s_j(x).$$

Viceversa, è immediato verificare che una famiglia di morfismi

$$s_i : V \cap U_i \rightarrow \mathbb{C}^r$$

che soddisfa (1.3), definisce una sezione di E sull'aperto V .

1.8 Fibrati vettoriali e fasci localmente liberi

Sia X una varietà ed indichiamo con $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni regolari (cioè continue se X è una varietà topologica, di classe C^∞ se X è una varietà differenziabile, etc.) su X . Sia E un fibrato vettoriale di rango r su X .

Per ogni aperto $U \subset X$, l'insieme $\Gamma(U, E)$ delle sezioni di E su U è dotato di una struttura, definita nel modo ovvio, di modulo sull'anello $\mathcal{O}_X(U)$ delle funzioni regolari su U . Si ottiene in questo modo un fascio di $\mathcal{O}_X$ -moduli $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(E)$ su X , localmente isomorfo a $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$. Si dice allora che $\mathcal{E}$ è un *fascio localmente libero* di rango r .

Viceversa, si può dimostrare (lo si faccia per esercizio) che, dato un fascio di $\mathcal{O}_X$ -moduli $\mathcal{E}$, localmente libero di rango r , esiste un unico (a meno di

isomorfismo) fibrato vettoriale E su X che ammette $\mathcal{E}$ come fascio delle sezioni. (*Suggerimento*: sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X tale che si abbiano degli isomorfismi

$$\phi_i : \mathcal{E}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}.$$

Si ponga

$$g_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \mathcal{O}_{U_{ij}}^{\oplus r} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_{ij}}^{\oplus r}$$

e si usino le funzioni di transizione (g_{ij}) per costruire il fibrato vettoriale E .)

Osservazione 1.8. In questa corrispondenza tra fibrati vettoriali e fasci localmente liberi le operazioni sui fibrati definite nella sezione 1.4 corrispondono alle analoghe operazioni definite sui fasci. In altri termini, se E ed F sono due fibrati vettoriali su X e $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ sono i fasci localmente liberi corrispondenti, i fibrati vettoriali $E \oplus F$, $E \otimes F$, E^* , etc. corrispondono rispettivamente ai fasci localmente liberi $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, $\mathcal{E}^*$, etc.

Per queste ragioni, nel seguito, useremo indifferentemente le espressioni “fibrato vettoriale” e “fascio (di $\mathcal{O}_X$ -moduli) localmente libero”.

1.9 Complementi

Sia E un fibrato vettoriale di rango r su una varietà X . Rispetto ad un opportuno ricoprimento $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di X e a delle trivializzazioni

$$\phi_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r,$$

E è determinato dalle funzioni di transizione

$$g_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r),$$

che soddisfano le identità (1.1) e (1.2). Tali identità equivalgono a dire che le g_{ij} costituiscono un 1-cociclo di Čech a valori nel fascio² $\mathcal{GL}(\mathbb{C}^r)$.

Sia E' un altro fibrato vettoriale su X , con trivializzazioni ϕ'_i e funzioni di transizione g'_{ij} , e sia

$$f : E \xrightarrow{\sim} E'$$

un isomorfismo di fibrati vettoriali. Indichiamo con

$$\tilde{f}_i : U_i \times \mathbb{C}^r \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r$$

²Si tratta del fascio di gruppi le cui sezioni su un aperto U sono le funzioni (continue, di classe C^∞ , olomorfe, etc.) da U in $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)$.

l'espressione locale di f nelle trivializzazioni ϕ_i e ϕ'_i (vedi sezione 1.3). Le funzioni $\tilde{f}_i$ sono del tipo

$$(x, v) \mapsto (x, h_i(x)v),$$

ove le h_i sono delle sezioni del fascio $\mathcal{GL}(\mathbb{C}^r)$ su U_i , cioè delle funzioni

$$h_i : U_i \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r).$$

Si verifica allora che le funzioni di transizione di E ed E' sono legate dalla seguente identità:

$$(1.4) \quad g'_{ij}(x) = h_i(x)g_{ij}(x)h_j(x)^{-1}, \quad \forall x \in U_{ij}.$$

Ciò equivale a dire che i cocicli (g_{ij}) e (g'_{ij}) differiscono per un cobordo e quindi determinano la stessa classe di coomologia nel primo insieme³ di coomologia di Čech $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{GL}(\mathbb{C}^r))$, di $\mathcal{GL}(\mathbb{C}^r)$ rispetto al ricoprimento $\mathcal{U}$.

È facile convincersi che vale anche il viceversa, cioè che un elemento di $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{GL}(\mathbb{C}^r))$ determina, a meno di isomorfismo, un fibrato vettoriale di rango r su X .

Se il ricoprimento $\mathcal{U}$ è scelto in modo tale che la coomologia di Čech coincida con la coomologia usuale dei fasci (il che è sempre possibile nei casi che ci interessano), si è così dimostrato che l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali di rango r su X è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $H^1(X, \mathcal{GL}(\mathbb{C}^r))$.

Consideriamo ora il caso particolare dei fibrati vettoriali di rango 1. L'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati in rette su X ha una struttura naturale di gruppo commutativo, con l'operazione di gruppo determinata dal prodotto tensoriale (l'elemento neutro è la classe di isomorfismo dei fibrati in rette triviali e l'inverso della classe contenente un fibrato in rette L è la classe del fibrato duale L^*). Tale gruppo è il *gruppo di Picard* di X , denotato con $\mathrm{Pic}(X)$.

Da quanto dimostrato precedentemente si deduce che c'è una biiezione naturale

$$(1.5) \quad \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}_X^*),$$

ove $\mathcal{O}_X^*$ è il sottofascio degli elementi invertibili di $\mathcal{O}_X$.

³Se $r > 1$ si tratta solo di un insieme e non di un gruppo di coomologia, a causa del fatto che $\mathcal{GL}(\mathbb{C}^r)$ è un fascio di gruppi non commutativi.

È immediato verificare che (1.5) è in realtà un isomorfismo di gruppi. Infatti ciò equivale al fatto che, se $(g_{ij}(x))$ e $(g'_{ij}(x))$ sono le funzioni di transizione dei fibrati in rette L ed L' rispettivamente, allora $(g_{ij}(x)g'_{ij}(x))$ sono le funzioni di transizione di $L \otimes L'$ e $(g_{ij}(x)^{-1})$ sono quelle di L^* (vedi sezione 1.4).

Consideriamo la sequenza esatta

$$(1.6) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0,$$

ove l'omomorfismo $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^*$ è definito da $f \mapsto e^{2\pi i f}$. Considerando la sequenza esatta lunga di coomologia ad essa associata, si ottiene

$$(1.7) \quad H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X).$$

Se X è una varietà topologica (in realtà è sufficiente supporre che X sia uno spazio topologico paracompatto) oppure una varietà differenziabile (ma non una varietà olomorfa o algebrica!), il fascio strutturale $\mathcal{O}_X$ è un fascio “fine”⁴ e, pertanto, i gruppi di coomologia $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ e $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ sono nulli. Dalla sequenza esatta (1.7), ricordando anche l'isomorfismo (1.5), si ottiene quindi un isomorfismo

$$\text{Pic}(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z}).$$

In particolare, se X è una varietà differenziabile e se indichiamo con X_{top} lo spazio topologico soggiacente, si ottiene un isomorfismo

$$\text{Pic}(X) \cong \text{Pic}(X_{\text{top}}).$$

Ciò significa che la classificazione topologica dei fibrati in rette su X (o meglio su X_{top}) coincide con la classificazione C^∞ . Questo è falso nel caso olomorfo, o algebrico.

⁴Un fascio $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico paracompatto X è detto “fine” se, per ogni ricoprimento aperto localmente finito $(U_i)_{i \in I}$ di X esistono degli omomorfismi $f_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ tali che, per ogni $i \in I$ esista un sottoinsieme chiuso A_i di X , contenuto in U_i , tale che $f_i(\mathcal{F}_x) = 0$, per ogni $x \notin A_i$, ed ancora si abbia $\sum_{i \in I} f_i = \text{id}$.

Se $\mathcal{F}$ è un fascio “fine” su X , si dimostra facilmente che i gruppi di coomologia $H^i(X, \mathcal{F})$ sono nulli, per $i \geq 1$ (cf. [3], oppure [8]).

Capitolo 2

Classificazione topologica

2.1 Definizioni

Richiamiamo qui alcune nozioni di topologia. Per una trattazione esauriente si rimanda, per esempio, a [19].

Siano X e Y due spazi topologici e $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ due applicazioni continue.

Definizione 2.1. Una *omotopia* tra f_0 e f_1 è un'applicazione continua

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

tale che, per ogni $x \in X$,

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= f_0(x), \\ F(x, 1) &= f_1(x). \end{aligned}$$

Due applicazioni continue si dicono *omotope* se esiste tra loro una omotopia.

La relazione di omotopia è una relazione di equivalenza sull'insieme delle funzioni continue da X in Y . L'insieme delle classi di equivalenza sarà indicato con $[X, Y]$, e detto *l'insieme delle classi di omotopia* di X in Y .

Definizione 2.2. Due spazi topologici X e Y sono *omotopi* (o hanno lo stesso tipo di omotopia) se esistono due funzioni continue $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tali che $g \circ f$ sia omotopa a id_X e $f \circ g$ sia omotopa a id_Y .

Sia ora A un sottoinsieme di X .

Definizione 2.3. Due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono *omotope relativamente ad A* se esiste una funzione continua

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

tale che, per ogni $x \in X$,

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= f_0(x), \\ F(x, 1) &= f_1(x), \end{aligned}$$

e, per ogni $a \in A$ e ogni $t \in [0, 1]$,

$$F(a, t) = f_0(a) = f_1(a).$$

Tale F è detta una *omotopia relativa* ad A .

Si noti che questa condizione implica che $f_0|_A = f_1|_A$.

Sia ora X uno spazio topologico ed x_0 un punto di X . Indichiamo con I^n l'ipercubo unitario $[0, 1]^n$ e con ∂I^n il suo bordo. Per ogni intero $n \geq 1$ indichiamo con $\pi_n(X, x_0)$ l'insieme delle classi di omotopia relativa a ∂I^n delle funzioni $f : I^n \rightarrow X$ tali che $f(\partial I^n) = \{x_0\}$.

Se f e g sono due applicazioni continue da I^n in X , tali che $f(\partial I^n) = g(\partial I^n) = \{x_0\}$, si definisca $f \cdot g$ ponendo

$$f \cdot g(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq 1/2, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 1/2 \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Si può dimostrare che questa operazione definisce una struttura di gruppo su $\pi_n(X, x_0)$. Tale gruppo è detto l'*n-simo gruppo di omotopia* di X in x_0 . In particolare, il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ è detto il *gruppo fondamentale* di X in x_0 .

Si indica poi con $\pi_0(X, x_0)$ l'insieme delle componenti connesse per archi di X (si tratta, in realtà, di un insieme “puntato”, cioè di un insieme in cui si è scelto un particolare elemento; in questo caso la componente connessa per archi di X contenente x_0).

Se X è connesso per archi si può dimostrare che, per ogni $x, y \in X$ ed ogni $n \geq 0$, $\pi_n(X, x) \cong \pi_n(X, y)$. Tale gruppo si indica allora semplicemente con $\pi_n(X)$.

Si dimostra ancora che, se X e Y sono due spazi topologici connessi per archi omotopi tra loro, allora $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y)$, per ogni $n \geq 0$.

Osservazione 2.4. Si può dare una definizione alternativa dei gruppi di omotopia di uno spazio topologico X . Indichiamo con S_n la n -sfera unitaria e fissiamo un punto $s_n \in S_n$. Si pone allora

$$(2.1) \quad \pi_n(X, x_0) = [(S_n, s_n), (X, x_0)],$$

ove con tale simbolo si denota l'insieme delle classi di omotopia (puntata) delle applicazioni continue di S_n in X che mandano il punto s_n in x_0 .

Si può dimostrare che questa definizione coincide, per ogni $n \geq 0$, con le definizioni date in precedenza.

Osservazione 2.5. Il gruppo fondamentale agisce sui gruppi di omotopia nel modo seguente: siano $\alpha : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ e $\beta : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ due funzioni continue; esiste una funzione continua $h : I^{n+1} \rightarrow X$ tale che $h(x, t) = \alpha(t)$ per $x \in \partial I^n$ e $t \in I$, e $h(x, 0) = \beta(x)$. L'applicazione $x \mapsto h(x, 1)$ definisce una classe di omotopia $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ che dipende solo dalle classi di omotopia di α e β e che sarà indicata con $[\alpha] \cdot [\beta]$. Questa azione è compatibile con la struttura di gruppo di $\pi_n(X, x_0)$, si ha cioè:

$$[\alpha] \cdot ([\beta_1] \cdot [\beta_2]) = ([\alpha] \cdot [\beta_1]) \cdot ([\alpha] \cdot [\beta_2]),$$

per ogni $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ e $[\beta_1], [\beta_2] \in \pi_n(X, x_0)$.

Si dimostra che, se X è connesso per archi, l'insieme delle orbite di $\pi_1(X, x_0)$ in $\pi_n(X, x_0)$ si identifica con l'insieme $[S_n, X]$ delle classi di omotopia della sfera S_n in X . Inoltre, se G è un gruppo topologico con elemento neutro e , l'azione di $\pi_1(G, e)$ su $\pi_n(G, e)$ è triviale, cioè ogni elemento di $\pi_1(G, e)$ agisce come l'identità. Se G è un gruppo topologico connesso si dimostra allora che il gruppo $\pi_n(G, e)$ coincide con il gruppo $[S_n, G]$ delle classi di omotopia (non puntata!) della sfera S_n in G , con la legge di gruppo indotta da quella di G (si noti la differenza con (2.1)).

Citiamo un ultimo risultato, di cui avremo bisogno nel seguito:

Proposizione 2.6. $\pi_1(\text{GL}(\mathbb{C}^r)) \cong \mathbb{Z}$.

2.2 Fibrati vettoriali su uno spazio contrattile

Definizione 2.7. Uno spazio topologico X è detto *contrattile* se esiste un punto $x_0 \in X$ ed un'omotopia

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow X,$$

tale che

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= x & \forall x \in X, \\ F(x, 1) &= x_0 & \forall x \in X, \\ F(x_0, t) &= x_0 & \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

In altre termini, X è contrattile se l'identità id_X è omotopa ad un'applicazione costante.

Consideriamo ora uno spazio topologico X che, per semplicità, supporremo compatto. Ci proponiamo di dimostrare il seguente risultato:

Teorema 2.8. *Sia E un fibrato vettoriale topologico su X . Se X è contrattile allora E è triviale.*

Lemma 2.9. *Sia E un fibrato vettoriale su $X \times [0, 1]$. Per ogni $t \in [0, 1]$ indichiamo con E_t il fibrato vettoriale su X indotto dall'inclusione $X \hookrightarrow X \times [0, 1]$ definita da $x \mapsto (x, t)$. Si ha allora:*

$$E_0 \cong E_1.$$

Dimostrazione. Sia $p : X \times [0, 1] \rightarrow X$ la proiezione canonica. Su $X \times \{t\}$ i fibrati $p^*(E_t)$ ed E coincidono. Esiste pertanto (qui si usa l'ipotesi che X è compatto) un intorno aperto V di t in $[0, 1]$ ed un isomorfismo

$$p^*(E_t)|_{X \times V} \cong E|_{X \times V}.$$

Per ogni $t' \in V$ si ha dunque

$$E_t \cong E_{t'}.$$

Ciò significa che la classe di isomorfismo di E_t è localmente costante su $[0, 1]$; essa è quindi costante. $\square$

Lemma 2.10. *Siano f_0 e $f_1 : X \rightarrow Y$ due applicazioni omotope, e sia E un fibrato vettoriale su Y . Allora*

$$f_0^*(E) \cong f_1^*(E).$$

Dimostrazione. Sia $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ un'omotopia tra f_0 e f_1 ; si ha dunque $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$, per ogni $x \in X$. Applicando il Lemma 2.9 al fibrato vettoriale $F^*(E)$ su $X \times [0, 1]$, si ottiene:

$$F^*(E)|_{X \times \{0\}} = f_0^*(E) \cong f_1^*(E) = F^*(E)|_{X \times \{1\}}.$$

$\square$

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema.

del Teorema 2.8. Dato che X è uno spazio contrattile, esiste un punto $x_0 \in X$ tale che l'applicazione costante $i_{x_0} : X \rightarrow X$, $x \mapsto x_0$, è omotopa all'identità id_X . In base al Lemma 2.10 si ha quindi:

$$E \cong i_{x_0}^*(E) = X \times E_{x_0} \cong X \times \mathbb{C}^r.$$

□

2.3 Incollamento di fibrati vettoriali

Sia $X = X_1 \cup X_2$ un ricoprimento di X mediante due sottoinsiemi chiusi X_1 e X_2 . Poniamo $X_{12} = X_1 \cap X_2$ e sia

$$\phi : X_{12} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^r)$$

una funzione continua.

Possiamo allora definire un fibrato vettoriale $E(\phi)$, di rango r , su X ponendo

$$E(\phi) = ((X_1 \times \mathbb{C}^r) \sqcup (X_2 \times \mathbb{C}^r)) / \sim,$$

ove $\sim$ è la più fine tra le relazioni di equivalenza che identifica i punti $(x_1, v_1) \in X_1 \times \mathbb{C}^r$ e $(x_2, v_2) \in X_2 \times \mathbb{C}^r$ se $x_1 = x_2$ e $v_2 = \phi(x_1)v_1$.

Se $\phi' : X_{12} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^r)$ è un'altra applicazione continua omotopa a ϕ , l'omotopia tra ϕ e ϕ'

$$\Phi : X_{12} \times [0, 1] \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^r)$$

permette di costruire, con lo stesso metodo usato per ϕ , un fibrato vettoriale su $X \times [0, 1]$ che coincide con $E(\phi)$ su $X \times \{0\}$ e con $E(\phi')$ su $X \times \{1\}$. In base al Lemma 2.9 si ha quindi un isomorfismo

$$E(\phi) \cong E(\phi').$$

Se indichiamo con $\text{Vett}_r(X)$ l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali topologici di rango r su X , si ottiene così una mappa

$$(2.2) \quad [X_{12}, \text{GL}(\mathbb{C}^r)] \rightarrow \text{Vett}_r(X),$$

che associa alla classe di omotopia $[\phi]$ la classe di isomorfismo del fibrato vettoriale $E(\phi)$.

Proposizione 2.11. *Se X_1 e X_2 sono contrattili, l'applicazione (2.2) è una biiezione.*

Dimostrazione. Dimostriamo la suriettività. Sia E un fibrato vettoriale su X . In base al Teorema 2.8, esistono delle trivializzazioni

$$\phi_1 : E|_{X_1} \xrightarrow{\sim} X_1 \times \mathbb{C}^r, \quad \phi_2 : E|_{X_2} \xrightarrow{\sim} X_2 \times \mathbb{C}^r.$$

Sull'intersezione X_{12} si ottiene dunque un isomorfismo di fibrati vettoriali triviali

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : X_{12} \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\sim} X_{12} \times \mathbb{C}^r.$$

Questo isomorfismo è determinato da una applicazione continua

$$\phi : X_{12} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r),$$

ed è chiaro che è $E(\phi) \cong E$.

Occupiamoci ora dell'iniettività. Siano ϕ e $\phi' : X_{12} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)$ due funzioni continue tali che $E(\phi) \cong E(\phi')$. Considerando le restrizioni a X_i , $i = 1, 2$, tale isomorfismo individua degli isomorfismi

$$E(\phi)|_{X_i} = X_i \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\sim} X_i \times \mathbb{C}^r = E(\phi')|_{X_i},$$

che sono determinati da delle funzioni continue

$$g_i : X_i \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r).$$

Dalle definizioni di $E(\phi)$ e $E(\phi')$ si deduce immediatamente che, per ogni $x \in X_{12}$, si ha

$$\phi'(x) = g_2(x)\phi(x)g_1(x)^{-1}.$$

Se X_1 e X_2 sono contrattili, le applicazioni g_1 e g_2 sono omotope all'applicazione costante definita dall'elemento neutro $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^r}$ di $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)$. Ne deriva che ϕ è omotopa a ϕ' . $\square$

Osservazione 2.12. Sotto la sola ipotesi che tutti i fibrati vettoriali su X_1 e X_2 siano triviali, si ottiene comunque un'applicazione suriettiva

$$[X_{12}, \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)] \rightarrow \mathrm{Vett}_r(X).$$

Se X_1 o X_2 non sono contrattili, si definisce una relazione di equivalenza $\sim$ su $[X_{12}, \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)]$ ponendo $\phi \sim \phi'$ se esistono delle funzioni continue $g_i : X_i \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)$, per $i = 1, 2$, tali che

$$\phi'(x) = g_2(x)\phi(x)g_1(x)^{-1}, \quad \forall x \in X_{12}.$$

Dalla dimostrazione della Proposizione 2.11 si deduce che l'insieme $\mathrm{Vett}_r(X)$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme quoziente $[X_{12}, \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)]/\sim$.

Corollario 2.13. $\text{Vett}_r(S_n) \cong \pi_{n-1}(\text{GL}(\mathbb{C}^r))$.

Dimostrazione. Se ricopriamo la sfera S_n con due semisfere chiuse la cui intersezione è una sfera S_{n-1} , ed osserviamo che le semisfere chiuse sono contrattili, otteniamo una biiezione

$$\text{Vett}_r(S_n) \cong [S_{n-1}, \text{GL}(\mathbb{C}^r)].$$

Osservando che $\text{GL}(\mathbb{C}^r)$ è connesso, da quanto visto nell'Osservazione 2.5 si deduce che:

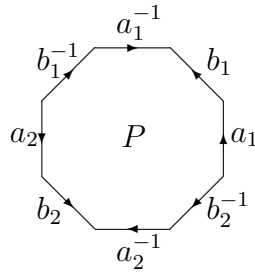
$$[S_{n-1}, \text{GL}(\mathbb{C}^r)] \cong \pi_{n-1}(\text{GL}(\mathbb{C}^r)).$$

□

Osservazione 2.14. Si osservi che, per $n = 1$, il corollario precedente afferma che l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali topologici complessi sul cerchio S_1 è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle componenti connesse di $\text{GL}(\mathbb{C}^r)$, e quindi afferma in sostanza che ogni fibrato vettoriale topologico complesso su S_1 è triviale.

2.4 Superficie di Riemann

Consideriamo un poligono regolare $P \subset \mathbb{C}$ con $4g$ vertici $Q_k = e^{\frac{ik\pi}{2g}}$ ed indichiamo con $a_k, b_k, a_k^{-1}, b_k^{-1}$ i lati $Q_{k-1}Q_k$, a seconda che k sia congruo a 1, 2, 3 oppure 0 modulo 4, orientati nel verso positivo o negativo a seconda che l'esponente sia 1 o -1 . La figura riportata qui sotto illustra, a titolo di esempio, il caso $g = 2$.



Sia X lo spazio topologico quoziente di P per la relazione di equivalenza che identifica i lati a_k con a_k^{-1} e b_k con b_k^{-1} (rispettando l'orientazione assegnata). Indichiamo con $p : P \rightarrow X$ la proiezione canonica. Lo spazio

topologico X è una superficie reale connessa e compatta il cui gruppo fondamentale si può calcolare applicando il teorema di Seifert–van Kampen. Si consideri il ricoprimento di P determinato dagli aperti

$$P_1 = \{z \in P : |z| > 1/3\}$$

e

$$P_2 = \{z \in P : |z| < 2/3\},$$

e siano X_1 e X_2 le loro rispettive immagini in X . L'aperto X_1 è omotopo a un fiore con $2g$ petali¹, mentre l'aperto X_2 è contrattile. Inoltre l'intersezione $X_{12} = X_1 \cap X_2$ è omotopa a un cerchio. Il teorema di Seifert–van Kampen afferma che $\pi_1(X)$ è la somma amalgamata dei gruppi fondamentali di X_1 e X_2 secondo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1) & & \pi_1(X_2) \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & \pi_1(X_{12}) & \end{array}$$

Sia α_k la classe del circuito $p(a_k)$ e β_k quella del circuito $p(b_k)$. Il gruppo fondamentale di X si identifica al quoziente del gruppo libero generato da $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ modulo il sottogruppo normale generato da $\prod_{k=1}^g [\alpha_k, \beta_k]$, ove $[\alpha_k, \beta_k] = \alpha_k \beta_k \alpha_k^{-1} \beta_k^{-1}$.

Ancora, usando il ricoprimento X_1, X_2 e la sequenza esatta di Mayer–Vietoris,

$$H^1(X) \rightarrow H^1(X_1) \xrightarrow{\rho} H^1(X_{12}) \rightarrow H^2(X) \rightarrow 0,$$

si possono determinare i numeri di Betti di X : la mappa ρ infatti è nulla e, di conseguenza, si ha $b_1(X) = 2g$ e $b_2(X) = 1$. La superficie X è dunque una superficie orientabile di genere g .

Infine, è ben noto che ogni superficie orientabile, connessa e compatta, è omeomorfa ad una superficie X del tipo descritto precedentemente.

¹Si chiama *fiore con k petali* lo spazio topologico ottenuto da k circonferenze $C_1, \dots, C_k$, a due a due disgiunte, tramite l'identificazione dei punti $P_1 \in C_1, \dots, P_k \in C_k$.

2.5 Fibrati vettoriali sulle superficie di Riemann

In questa sezione indicheremo con $\text{Pic}(X)$ il gruppo delle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali topologici di rango 1 su X e con $\mathbb{C}_X^r$ il fibrato vettoriale triviale di rango r .

Teorema 2.15. (i) $\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$;

(ii) L applicazione

$$\begin{aligned} \text{Pic}(X) &\rightarrow \text{Vett}_r(X) \\ L &\mapsto L \oplus \mathbb{C}_X^{r-1} \end{aligned}$$

è una biiezione.

Dimostrazione. (i). Consideriamo la sequenza esatta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0,$$

definita nella sezione 1.9 del Cap. 1. Utilizzando il fatto che il fascio $\mathcal{O}_X$ è “fine” e, di conseguenza, sono nulli i gruppi di coomologia $H^i(X, \mathcal{O}_X)$, per $i \geq 1$, dalla sequenza esatta lunga di coomologia associata a (2.5) si ottiene un isomorfismo

$$\text{Pic}(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

che dimostra la prima asserzione.

(ii). Consideriamo il ricoprimento di P determinato dai sottoinsiemi chiusi

$$A' = \{z \in P : |z| \geq 1/2\}$$

e

$$B' = \{z \in P : |z| \leq 1/2\},$$

ed indichiamo con A e B le loro rispettive immagini in X . Si osservi che B è contrattile, mentre A è omotopo a un fiore con $2g$ petali. L'intersezione $A \cap B$ è un cerchio, che indicheremo con C . Ogni fibrato vettoriale su B è triviale (in quanto B è contrattile) e, utilizzando l'Osservazione 2.14, si dimostra facilmente che lo stesso vale per i fibrati vettoriali su A . Pertanto, ricordando quanto detto nell'Osservazione 2.12, si ottiene un'applicazione suriettiva

$$(2.3) \quad \mathbb{Z} \cong \pi_1(\text{GL}(\mathbb{C}^r)) \cong [C, \text{GL}(\mathbb{C}^r)] \rightarrow \text{Vett}_r(X).$$

Consideriamo ora l'inclusione $\mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)$ definita da

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa mappa induce un isomorfismo sui gruppi fondamentali. Si ha quindi il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(X) & \xrightarrow{\sim} & [C, \mathbb{C}^*] \\ \downarrow & & \cong \downarrow \\ \mathrm{Vett}_r(X) & \longleftarrow & [C, \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)], \end{array}$$

ove l'applicazione $\mathrm{Pic}(X) \rightarrow \mathrm{Vett}_r(X)$ associa ad un fibrato in rette L il fibrato vettoriale $L \oplus \mathbb{C}_X^{r-1}$. Componendo questa mappa con l'applicazione

$$\begin{aligned} \det : \mathrm{Vett}_r(X) &\rightarrow \mathrm{Pic}(X) \\ E &\mapsto \det(E), \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}(X) &\rightarrow \mathrm{Vett}_r(X) \xrightarrow{\det} \mathrm{Pic}(X) \\ L &\mapsto L \oplus \mathbb{C}_X^{r-1} \mapsto L, \end{aligned}$$

da cui, tenendo conto dell'isomorfismo $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$ e della suriettività dell'applicazione (2.3), si deduce che l'applicazione $L \mapsto L \oplus \mathbb{C}_X^{r-1}$ è una biiezione tra $\mathrm{Pic}(X)$ e $\mathrm{Vett}_r(X)$. $\square$

Osservazione 2.16. Ricordando quanto detto nell'Osservazione 2.12, si vede come, nel corso della dimostrazione della seconda asserzione del teorema precedente, si ottenga una biiezione tra $\mathrm{Vett}_r(X)$ e l'insieme $[C, \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)]/\sim$, ove $\sim$ è la relazione di equivalenza definita ponendo $\phi \sim \phi'$ se esiste un'applicazione continua $g : A \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)$ tale che, per ogni $x \in C$, si abbia $\phi'(x) = g(x)\phi(x)$.

Si potrebbe, in effetti, dimostrare direttamente che l'azione di $[A, \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)]$ su $[C, \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)]$ così definita è triviale. In questo modo si otterrebbe subito una biiezione tra $\mathrm{Vett}_r(X)$ e $[C, \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)] \cong \mathbb{Z}$, valevole per ogni $r \geq 1$.

2.6 Osservazioni finali

Terminiamo con alcune osservazioni e con la presentazione di alcuni risultati di cui ometteremo le dimostrazioni.

Sia X come sopra e L un fibrato in rette topologico su X . Si può dimostrare che L ha una sezione avente solo zeri isolati. Sia s una tale sezione e x un suo zero. Si fissi un intorno D di x , omeomorfo a un disco, sul quale il fibrato L ha una sezione non nulla e e sul quale s non ha altri zeri oltre a x . Si scriva $s(x) = f(x)e(x)$. Dato che $D \setminus \{x\}$ ha il tipo di omotopia di un cerchio, la funzione

$$f : D \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

ha un grado indipendente dalla scelta di D e della sezione e . Questo numero si chiama il *grado locale* di s in x , e sarà indicato con $\deg_x(s)$. Si può quindi definire il *grado* della sezione s ponendo

$$\deg(s) = \sum_{x \in Z(s)} \deg_x(s),$$

ove $Z(s)$ indica il luogo degli zeri di s . Il risultato fondamentale è espresso dal seguente teorema:

Teorema 2.17. *Il grado di una sezione continua di L , avente solo zeri isolati, è indipendente dalla sezione in questione.*

Si chiamerà quindi *grado* di L tale numero, indicato con $\deg L$. Si ottiene allora il risultato seguente:

Corollario 2.18. *La funzione $\text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, $L \mapsto \deg L$, è un isomorfismo di gruppi.*

Se E è un fibrato vettoriale di rango r , il fibrato $\det(E) = \wedge^r E$ è un fibrato in rette. Si definisce quindi il grado di E mediante

$$\deg(E) = \deg(\det(E)).$$

Corollario 2.19. *La funzione $\text{Vett}_r(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, $E \mapsto \deg(E)$, è biiettiva.*

Le curve algebriche proiettive lisce possono essere considerate come delle superficie reali compatte, connesse ed orientate. Ad ogni fibrato vettoriale algebrico E su una tale curva è associato il fibrato vettoriale topologico soggiacente $\tilde{E}$. Si dimostra allora che il grado (algebrico) di E , che definiremo in seguito, coincide col grado (topologico) del fibrato $\tilde{E}$.

Osservazione 2.20. È quasi superfluo far notare che la funzione grado

$$\deg : \text{Vett}_r(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

coincide con la biiezione fra $\text{Vett}_r(X)$ e $\mathbb{Z}$ costruita nella dimostrazione del Teorema 2.15.

Capitolo 3

Classificazione algebrica

3.1 Fibrati in rette e divisori

Sia X una varietà complessa¹, $\mathcal{O}_X^*$ il fascio delle funzioni olomorfe non nulle e $\mathcal{M}_X^*$ il fascio delle funzioni meromorfe non identicamente nulle su X .

Ricordiamo che un *divisore* (di Cartier) D su X è una sezione globale del fascio $\mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*$, cioè è il dato di un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di X e di una famiglia di funzioni meromorfe f_i su U_i , tali che

$$\frac{f_i}{f_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*).$$

Le f_i sono dette le *equazioni locali* del divisore D . L'insieme dei divisori su X , con l'operazione di somma determinata dal prodotto delle equazioni locali, costituisce un gruppo abeliano.

Dalla sequenza esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{M}_X^* \rightarrow \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$$

si ottiene una mappa naturale

$$H^0(X, \mathcal{M}_X^*) \rightarrow H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*).$$

Un divisore D è detto *principale* se appartiene all'immagine di tale mappa, cioè se è definito da un'unica equazione. Due divisori si dicono *linearmente equivalenti* se la loro differenza è un divisore principale. La relazione di

¹Tutto ciò che diremo vale anche per varietà algebriche o, più in generale, per schemi (vedi [7]).

equivalenza lineare è una relazione di equivalenza; l'insieme quoziente, cioè l'insieme delle classi di equivalenza lineare dei divisori (di Cartier) su X sarà indicato con $\text{CaCl}(X)$.

Consideriamo un divisore D determinato da $(U_i, f_i)_{i \in I}$. Sull'intersezione $U_{ij} = U_i \cap U_j$, poniamo

$$g_{ij} = \frac{f_i}{f_j}.$$

È immediato verificare che le funzioni g_{ij} soddisfano le identità (1.1) e (1.2) e determinano pertanto un fibrato in rette su X , che indicheremo con $\mathcal{O}_X(D)$.

Si dimostra facilmente che due fibrati in rette $\mathcal{O}_X(D)$ e $\mathcal{O}_X(D')$ sono isomorfi se e solo se i divisori D e D' sono linearmente equivalenti. Si ottiene così una mappa

$$\text{CaCl}(X) \rightarrow \text{Pic}(X).$$

Questa mappa è in realtà, sotto ipotesi molto deboli su X , un isomorfismo di gruppi.

3.2 Fibrati in rette su una curva

Sia C una curva proiettiva irriducibile e non singolare. Un divisore su C è una combinazione lineare formale di punti²

$$D = \sum_{i=1}^N n_i P_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}.$$

Si definisce il *grado* di D mediante

$$\deg(D) = \sum_{i=1}^N n_i.$$

Il grado dipende in realtà solo dalla classe di equivalenza lineare del divisore in questione e definisce pertanto una mappa

$$\deg : \text{CaCl}(C) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Visto l'isomorfismo $\text{CaCl}(C) \cong \text{Pic}(C)$, si ottiene così una funzione grado

$$\deg : \text{Pic}(C) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Si pone allora $\text{Pic}^d(C) = \deg^{-1}(d)$.

²Questa definizione di divisore su una curva è equivalente a quella data nella sezione precedente.

Osservazione 3.1. Nella sezione 2.6 si è visto come sia possibile definire il grado di un fibrato in rette topologico. Come già osservato, si può dimostrare che il grado del fibrato topologico soggiacente ad un fibrato in rette algebrico su C coincide col grado definito in questa sezione.

Il grado di un fibrato in rette è un parametro discreto che fornisce la decomposizione seguente:

$$\mathrm{Pic}(C) = \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}} \mathrm{Pic}^d(C).$$

Per ogni $d \in \mathbb{Z}$, si ha inoltre un isomorfismo

$$\mathrm{Pic}^0(C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^d(C)$$

determinato dal prodotto tensoriale con il fascio $\mathcal{O}_C(n) = \mathcal{O}_C(1)^{\otimes n}$.

In conclusione, si è visto che, per classificare tutti i fibrati in rette su C , basta studiare $\mathrm{Pic}^0(C)$, il gruppo delle classi di isomorfismo dei fibrati in rette di grado 0 su C . Lo studio di $\mathrm{Pic}^0(C)$ è oggetto di una teoria, ormai classica, che risale a Jacobi. Esporremo qui brevemente i risultati principali di tale teoria.

Sia C una curva proiettiva non singolare di genere g . Dal punto di vista topologico, C è una superficie reale compatta, connessa ed orientata. Sia $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ una base di 1-cicli di $H_1(C, \mathbb{Z})$, normalizzata in modo tale che

$$(a_i, a_j) = 0, \quad (b_i, b_j) = 0, \quad (a_i, b_j) = \delta_{ij}.$$

Sia $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ una base di 1-forme olomorfe in $H^0(C, \omega_C)$, normalizzata in modo che

$$\int_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}.$$

Si consideri la matrice, detta dei B -periodi,

$$\Omega = \begin{pmatrix} \int_{b_1} \omega_1 & \cdots & \int_{b_g} \omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{b_1} \omega_g & \cdots & \int_{b_g} \omega_g \end{pmatrix}.$$

Si definisce allora la *varietà jacobiana* di C ponendo

$$J(C) = \mathbb{C}^g / \Lambda,$$

ove Λ è il reticolo generato dalle colonne della matrice

$$(1|\Omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \int_{b_1} \omega_1 & \cdots & \int_{b_g} \omega_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \int_{b_1} \omega_2 & \cdots & \int_{b_g} \omega_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \int_{b_1} \omega_g & \cdots & \int_{b_g} \omega_g \end{pmatrix}.$$

La varietà jacobiana $J(C)$ è un toro complesso.

Se $D = \sum_i (P_i - Q_i)$ è un divisore di grado 0 su C , è ben definito il punto

$$\mu(D) = \left(\sum_i \int_{Q_i}^{P_i} \omega_1, \dots, \sum_i \int_{Q_i}^{P_i} \omega_g \right) \in J(C).$$

Il teorema di Abel afferma che, se D è un divisore principale, allora $\mu(D) = 0$ e, di conseguenza,

$$\mu(D) = \mu(D') \Leftrightarrow D \text{ è linearmente equivalente a } D'.$$

Si ottiene così una mappa iniettiva

$$\mu : \text{Pic}^0(C) \rightarrow J(C).$$

Il teorema di inversione di Jacobi afferma che questa mappa è in realtà un isomorfismo di gruppi.

Quest'ultimo risultato determina la struttura (di varietà) di $\text{Pic}^0(C)$ e fornisce quindi una risposta al problema della classificazione dei fibrati in rette su C .

Riassunto, abbiamo visto che le classi di isomorfismo dei fibrati in rette su una curva proiettiva liscia e connessa C dipendono da un parametro discreto, il grado, $d \in \mathbb{Z}$, e da un parametro che varia in una varietà (toro complesso) di dimensione pari al genere della curva C .

3.3 Fibrati vettoriali sulla retta proiettiva

In questa sezione indicheremo con $\mathbb{P}^1$ la retta proiettiva sul corpo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Il termine fibrato vettoriale indicherà allora un fibrato vettoriale olomorfo (o algebrico).

La classificazione dei fibrati vettoriali sulla retta proiettiva è dovuta a Grothendieck [4], che ha dimostrato come ogni fibrato vettoriale su $\mathbb{P}^1$ si spezzi nella somma diretta di fibrati in rette. Precisamente vale il seguente risultato:

Teorema 3.2. *Sia E un fibrato vettoriale di rango r su $\mathbb{P}^1$. Esistono degli interi $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}$, con $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$, tali che*

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_r).$$

Tali a_i sono univocamente determinati.

Per la dimostrazione di questo teorema abbiamo bisogno di richiamare due teoremi, dovuti a Serre, noti sotto il nome di Teoremi A e B rispettivamente.

Sia X una varietà proiettiva e sia $\mathcal{O}_X(1)$ un fascio invertibile molto ampio su X . Se E è un fascio localmente libero su X , si pone

$$E(n) = E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) = E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(1)^{\otimes n}.$$

Teorema A *Per ogni fascio localmente libero E di rango r su X esiste un intero m_0 tale che, per ogni $n \geq m_0$, $E(n)$ è generato dalle sue sezioni globali (ciò significa che la mappa naturale $H^0(X, E(n)) \rightarrow E(n)_x$ è suriettiva, per ogni $x \in X$).*

Teorema B *Per ogni fascio localmente libero E di rango r su X esiste un intero n_0 tale che, per ogni $n \geq n_0$, $H^i(X, E(n)) = 0$, per ogni $i \geq 1$.*

Osservazione 3.3. Si noti che, nei due teoremi precedenti, gli interi m_0 e n_0 dipendono dal fibrato E .

del Teorema 3.2. Si procede per induzione sul rango di E .

Se $r = 1$ non c'è niente da dimostrare. Supponiamo allora di aver dimostrato il teorema per tutti i fibrati di rango r . Sia E un fibrato vettoriale di rango $r + 1$ su $\mathbb{P}^1$. Utilizzando il Teorema B e la dualità di Serre, si trova che

$$H^0(\mathbb{P}^1, E(n)) = 0, \quad \text{per } n \ll 0.$$

Il Teorema A afferma però che

$$H^0(\mathbb{P}^1, E(n)) \neq 0, \quad \text{per } n \gg 0;$$

esiste quindi un unico intero n_0 tale che

$$H^0(\mathbb{P}^1, E(n_0)) \neq 0, \quad H^0(\mathbb{P}^1, E(n)) = 0, \quad \text{per } n < n_0.$$

Sia allora $s \in H^0(\mathbb{P}^1, E(n_0))$, con $s \neq 0$. Una tale sezione non può annullarsi; infatti se esistesse un punto $x \in \mathbb{P}^1$ con $s(x) = 0$, dalla sequenza esatta

$$0 \rightarrow E(n_0) \otimes \mathcal{O}(-x) \rightarrow E(n_0) \rightarrow E(n_0)_x \rightarrow 0$$

si dedurrebbe che $s \in H^0(\mathbb{P}^1, E(n_0) \otimes \mathcal{O}(-x)) = H^0(\mathbb{P}^1, E(n_0 - 1)) = 0$, contraddicendo l'ipotesi.

La sezione s genera quindi un sottofibrato triviale di E . Si ha così una sequenza esatta corta di fibrati vettoriali

$$(3.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{s} E(n_0) \rightarrow F \rightarrow 0.$$

Per l'ipotesi induttiva F è spezzato, cioè esistono degli interi $b_1, \dots, b_r$, univocamente determinati dalla condizione $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_r$, tali che

$$F \cong \mathcal{O}(b_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(b_r).$$

Per terminare la dimostrazione è allora sufficiente dimostrare che la sequenza esatta (3.1) si spezza. Come ben noto (vedi Appendice A), l'ostruzione al suo spezzamento stà nel gruppo

$$\text{Ext}^1(F, \mathcal{O}) = H^1(\mathbb{P}^1, F^* \otimes \mathcal{O}) = \bigoplus_{i=1}^r H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-b_i)).$$

Notiamo che

$$H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-b_i)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(b_i - 2))^*,$$

quindi l'intero gruppo $\text{Ext}^1(F, \mathcal{O})$ si annulla se, per ogni i , si ha $b_i < 2$.

Dimostreremo ora che si ha addirittura $b_i \leq 0$, per ogni $i = 1, \dots, r$. Tensorizzando (3.1) per $\mathcal{O}(-1)$ otteniamo la sequenza esatta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow E(n_0 - 1) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(b_i - 1) \rightarrow 0,$$

la cui sequenza esatta lunga di coomologia è

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^1, E(n_0 - 1)) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(b_i - 1)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-1)) = 0.$$

Si ha quindi

$$\bigoplus_{i=1}^r H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(b_i - 1)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, E(n_0 - 1)) = 0,$$

ove l'ultima uguaglianza deriva dalla definizione di n_0 . Ciò implica quindi che $b_i \leq 0$, per ogni $i = 1, \dots, r$.

Abbiamo così dimostrato che la sequenza esatta (3.1) è spezzata. Tensorizzando per $\mathcal{O}(-n_0)$ si ottiene allora

$$E \cong \mathcal{O}(-n_0) \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(b_i - n_0) = \bigoplus_{i=1}^{r+1} \mathcal{O}(a_i),$$

con $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{r+1}$.

Passiamo all'unicità. Supponiamo che ci siano due diverse decomposizioni

$$(3.2) \quad \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_r) \cong \mathcal{O}(b_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(b_r),$$

con $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$ e $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_r$. Sia a_j il primo degli a che non è uguale a b_j , in modo che si abbia $a_1 = b_1, \dots, a_{j-1} = b_{j-1}$ e $a_j \neq b_j$. Non è restrittivo supporre (a meno di scambiare gli a con i b) che $a_j > b_j$. Tensorizzando (3.2) per $\mathcal{O}(-a_j)$, si ottiene:

$$\bigoplus_{i=1}^{j-1} \mathcal{O}(a_i - a_j) \oplus \mathcal{O} \oplus \bigoplus_{i=j+1}^r \mathcal{O}(a_i - a_j) \cong \bigoplus_{i=1}^{j-1} \mathcal{O}(b_i - a_j) \oplus \bigoplus_{i=j}^r \mathcal{O}(b_i - a_j).$$

Dalle ipotesi fatte sugli a e sui b discende che, nel precedente isomorfismo, il membro di sinistra ha più sezioni olomorfe di quello di destra, portando così ad una contraddizione. $\square$

Osservazione 3.4. Abbiamo visto in precedenza che l'unico invariante topologico di un fibrato vettoriale di rango r su $\mathbb{P}^1$ è il suo grado d . In altri termini, ogni fibrato vettoriale topologico E su $\mathbb{P}^1$ è della forma

$$E \cong \mathcal{O}(d) \oplus \mathcal{O}^{\otimes(r-1)},$$

ove $d = \deg(E)$.

Per un fibrato vettoriale olomorfo

$$E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_r),$$

si ha $\deg(E) = \sum_{i=1}^r a_i$.

In conclusione, possiamo riassumere quanto visto affermando che le classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali olomorfi di rango r su $\mathbb{P}^1$ sono in corrispondenza biunivoca con le r -uple di interi $(a_1, \dots, a_r)$, con $a_1 \geq \dots \geq a_r$. Due tali r -uple determinano fibrati vettoriali topologicamente isomorfi se e solo se le loro somme sono uguali. Questo significa, in particolare, che un fibrato vettoriale topologico di rango r su $\mathbb{P}^1$ ammette, in generale, molte strutture olomorfe differenti.

3.4 Famiglie limitate

Nella sezione precedente ci siamo occupati della classificazione dei fibrati vettoriali sulla retta proiettiva. Passiamo ora a considerare il caso in cui la curva di base abbia genere strettamente positivo. Il problema della classificazione dei fibrati vettoriali si riconduce ad un “problema di moduli”, come descritto in tutta generalità nell’Appendice B. In questa sezione vogliamo mettere in evidenza un fenomeno che preclude l’esistenza di spazi di moduli per fibrati vettoriali di rango e grado fissati su una curva.

Per ragioni tecniche, nello studio degli spazi di moduli è conveniente usare la teoria degli schemi. Il lettore che non abbia familiarità con tale teoria può, nella maggior parte dei casi, semplicemente sostituire il termine “schema” con “varietà”. Nel seguito tutti gli schemi si intendono noetheriani e definiti su $\mathbb{C}$, e per “punto” si intenderà, salvo avviso contrario, un punto chiuso.

Sia C una curva algebrica proiettiva, liscia e connessa, di genere g . Iniziamo con alcune definizioni:

Definizione 3.5. Sia dato un insieme $\mathcal{A}$ di classi di isomorfismo di fibrati vettoriali su C . Una *famiglia di elementi di $\mathcal{A}$ parametrizzata da uno schema (noetheriano e definito su $\mathbb{C}$) S* è un fascio localmente libero $\mathcal{F}$ su $S \times C$, tale che, per ogni punto (chiuso) s di S , la classe di isomorfismo di $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}|_{\{s\} \times C}$ sia un elemento di $\mathcal{A}$.

Definizione 3.6. Un insieme $\mathcal{A}$ di classi di isomorfismo di fibrati vettoriali su C è detto *limitato* se esiste uno schema S ed una famiglia di fibrati vettoriali $\mathcal{F}$ parametrizzata da S , tale che $\mathcal{A}$ sia contenuto nell’insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali

$$\mathcal{F}_s = \mathcal{F}|_{\{s\} \times C},$$

al variare di $s \in S$.

Dal teorema di semicontinuità [7, Cap. 3, Teor. 12.8] si deduce immediatamente il seguente risultato:

Proposizione 3.7. *Se $\mathcal{F}$ è un fascio localmente libero su $S \times C$ (basta, in realtà, supporre che $\mathcal{F}$ sia un fascio coerente su $S \times C$, piatto³ su S), le*

³Dato un morfismo di varietà $f : X \rightarrow Y$ ed un $\mathcal{O}_X$ -modulo $\mathcal{F}$, si dice che $\mathcal{F}$ è *piatto* su Y se, per ogni $x \in X$, la fibra $\mathcal{F}_x$ è un $\mathcal{O}_{Y,y}$ -modulo piatto, ove $y = f(x)$. Tale concetto algebrico rivela delle proprietà geometriche estremamente interessanti, tanto da far considerare la piattezza come una condizione naturale da imporre sulle famiglie.

funzioni

$$s \mapsto \dim H^0(C, \mathcal{F}_s), \quad s \mapsto \dim H^1(C, \mathcal{F}_s),$$

sono limitate e superiormente semicontinue.

Se queste funzioni sono costanti e se S è uno schema integro, i fasci $p_*(\mathcal{F})$ e $R^1p_*(\mathcal{F})$, ove $p : S \times C \rightarrow S$ è la proiezione canonica, sono localmente liberi.

Se $\mathcal{A}$ è un insieme limitato, l'insieme dei valori assunti dalla coppia (rango, grado) su $\mathcal{A}$ è finito. Dalla proposizione precedente deriva inoltre che è pure finito l'insieme dei valori assunti da $\dim H^0(C, E)$ e $\dim H^1(C, E)$, al variare di E in $\mathcal{A}$.

Proposizione 3.8. *Se $r \geq 2$, l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali di rango r e grado d su C non è limitato.*

Dimostrazione. Sia $P \in C$ e, per ogni intero $k > 0$, consideriamo il seguente fibrato vettoriale (di rango r e grado d):

$$E_k = \mathcal{O}_C(-kP) \oplus \mathcal{O}_C((d+k)P) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus(r-2)}.$$

Per il teorema di Riemann–Roch, si ha

$$\dim H^1(C, \mathcal{O}_C(-kP)) = k + g - 1,$$

e quindi

$$\dim H^1(C, E_k) \geq k + g - 1.$$

Dato che questo insieme di numeri non è limitato, l'insieme contenente i fibrati E_k non può essere limitato. $\square$

Osservazione 3.9. Dall'esempio precedente si vede come ciò che impedisce alla famiglia di essere limitata sia la presenza in essa di fibrati che hanno dei sottofibrati di grado arbitrariamente elevato. Questo fatto è da mettere in relazione con la nozione di stabilità che daremo in seguito.

3.5 Stabilità

Abbiamo visto che non può esistere uno spazio di moduli per le classi di isomorfismo di tutti i fibrati vettoriali, di rango e grado fissati, su una curva C . È quindi necessario restringerci ad un opportuno sottoinsieme. A questo scopo, la nozione più conveniente risulta essere la stabilità.

Definizione 3.10. Un fibrato vettoriale E su C è detto *semistabile* (risp. *stabile*) se, per ogni sottofibrato proprio $F \subset E$, si ha:

$$\mu(F) \leq \mu(E) \quad (\text{risp. } \mu(F) < \mu(E)),$$

ove

$$\mu(E) = \frac{\deg(E)}{\text{rk}(E)}$$

è detta la *pendenza* di E .

Osservazione 3.11. Equivalentemente, si può affermare che E è semistabile (risp. stabile) se, per ogni fibrato quoziente proprio G di E , si ha:

$$\mu(G) \geq \mu(E) \quad (\text{risp. } \mu(G) > \mu(E)).$$

Le seguenti proprietà sono del tutto evidenti.

Proposizione 3.12. (i) *Ogni fibrato in rette è stabile.*

(ii) *Se $(\text{rk}(E), \deg(E)) = 1$ allora, per il fibrato vettoriale E , le nozioni di stabilità e semistabilità coincidono.*

(iii) *E è semistabile (risp. stabile) se e solo se lo stesso vale per E^* .*

(iv) *Per ogni fibrato in rette L , E è semistabile (risp. stabile) se e solo se $E \otimes L$ lo è.*

Osservazione 3.13. Da quanto visto nella sezione 3.3 si deduce immediatamente che, sulla retta proiettiva, non esistono fibrati stabili di rango $r \geq 2$. Inoltre, se r non divide il grado d , non esistono neppure fibrati semistabili, mentre, se $r|d$, esiste un unico (a meno di isomorfismo) fibrato semistabile di rango r e grado d .

3.6 La filtrazione di Harder–Narasimhan

Sia E un fibrato vettoriale su C .

Lemma 3.14. *Esiste un intero n_0 tale che, per ogni sottofibrato $F \subset E$, si ha*

$$\mu(F) \leq n_0.$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{O}_C(1)$ un fascio molto ampio su C . Dal Teorema B di Serre si deduce che esiste un intero N tale che, per ogni $n \geq N$, si ha

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_C(n), E) = H^0(C, E(-n)) = 0.$$

Dal teorema di Riemann–Roch discende che, se L è un fibrato in rette con

$$\deg L > N \deg \mathcal{O}_C(1) + g,$$

si ha:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_C(N), L) = H^0(C, L(-N)) \neq 0,$$

da cui deriva che

$$\mathrm{Hom}(L, E) = 0.$$

Sia ora $F \subset E$ un sottofibrato di rango r' , con $1 \leq r' \leq \mathrm{rk}(E) - 1$. Si ha così un omomorfismo non nullo

$$\wedge^{r'} F \rightarrow \wedge^{r'} E.$$

Applicando quanto sopra detto ai fibrati $\wedge^{r'} E$, al variare di r' , si deduce che $\deg(\wedge^{r'} F) = \deg F$ è limitato. Di conseguenza è limitata anche la pendenza $\mu(F) = \deg F / \mathrm{rk} F$. $\square$

Da questo lemma si deduce il seguente risultato:

Proposizione 3.15. *Esiste un unico sottofibrato E_1 di E tale che, per ogni sottofibrato F di E , si abbia*

$$\mu(F) \leq \mu(E_1),$$

e, nel caso valga l'uguaglianza, sia

$$\mathrm{rk}(F) \leq \mathrm{rk}(E_1).$$

Il fibrato E_1 è quindi semistabile ed è chiamato il sottofibrato semistabile massimale di E .

Dimostrazione. È chiaro che E_1 esiste ed è semistabile. Dimostriamo che è unico.

Supponiamo che E'_1 soddisfi le stesse proprietà di E_1 e che $E'_1 \neq E_1$. Consideriamo la proiezione

$$\pi : E \rightarrow E/E'_1.$$

È chiaro che $\pi(E_1) \neq 0$. Sia allora G il sottofibrato di E/E'_1 , generato da $\pi(E_1)$. Dato che $\pi(E_1)$ è un quoziente di E_1 , che è semistabile, si deve avere

$$\mu(G) \geq \mu(\pi(E_1)) \geq \mu(E_1).$$

D'altra parte, considerando la sequenza esatta di fibrati vettoriali

$$0 \rightarrow E'_1 \rightarrow \pi^{-1}(G) \rightarrow G \rightarrow 0,$$

e tenendo presente che $\text{rk}(\pi^{-1}(G)) > \text{rk}(E'_1)$, dalle proprietà di E'_1 deriva che

$$\mu(\pi^{-1}(G)) < \mu(E'_1),$$

cioè

$$\mu(\pi^{-1}(G)) = \frac{\deg(\pi^{-1}(G))}{\text{rk}(\pi^{-1}(G))} = \frac{\deg(G) + \deg(E'_1)}{\text{rk}(G) + \text{rk}(E'_1)} < \frac{\deg(E'_1)}{\text{rk}(E'_1)},$$

da cui segue che

$$\mu(G) < \mu(E'_1) = \mu(E_1).$$

Si ottiene così una contraddizione, che prova l'unicità di E_1 . □

Da quest'ultimo risultato si deduce immediatamente il teorema seguente:

Teorema 3.16. (Harder–Narasimhan). *Esiste un'unica filtrazione di E ,*

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{k-1} \subset E_k = E,$$

costituita da sottofibrati vettoriali E_i , tali che, per $1 \leq i \leq k-1$, E_i/E_{i-1} sia il sottofibrato semistabile massimale di E/E_{i-1} . Questa filtrazione è detta la filtrazione di Harder–Narasimhan di E .

Dimostrazione. Diamo solo l'idea della dimostrazione, lasciando i dettagli al lettore. Sia E_1 il sottofibrato semistabile massimale di E . Se $E_1 \neq E$, si prosegue considerando E/E_1 ed indicando con E_2 il suo sottofibrato semistabile massimale, etc. □

3.7 La filtrazione di Jordan–Hölder

In questa sezione dimostreremo le principali proprietà dei fibrati (semi)stabili.

Proposizione 3.17. *Siano E e F due fibrati vettoriali semistabili su C .*

- (i) Se $\mu(E) > \mu(F)$, allora $\text{Hom}(E, F) = 0$.
- (ii) Se E e F sono stabili e $\mu(E) = \mu(F)$, allora si ha $\text{Hom}(E, F) = 0$ oppure $E \cong F$ (cioè ogni omomorfismo non nullo di E in F è un isomorfismo).
- (iii) Se E è stabile, allora E è semplice, cioè $\text{End}(E) \cong \mathbb{C}$ (ogni endomorfismo di E è una omotetia).

Dimostrazione. (i). Sia $f : E \rightarrow F$, con $f \neq 0$. Dato che F è semistabile, si ha

$$\mu(\text{Im}(f)) \leq \mu(F) < \mu(E).$$

Ma $\text{Im}(f)$ è isomorfo ad un quoziente di E , e l'ipotesi di semistabilità di E implica che $\mu(\text{Im}(f)) \geq \mu(E)$, il che è assurdo.

(ii). Ripetendo il ragionamento appena fatto per la dimostrazione di (i), si ottiene

$$\mu(\text{Im}(f)) \leq \mu(F) = \mu(E).$$

Ora però E è stabile, e questo implica che $E \cong \text{Im}(f)$. Si ha quindi

$$\mu(\text{Im}(f)) = \mu(E) = \mu(F),$$

e, dato che anche F è stabile, si deve avere $\text{Im}(f) \cong F$, quindi f deve essere un isomorfismo.

(iii). Sia $f : E \rightarrow E$ un omomorfismo non nullo; in base al punto (ii), f è dunque un isomorfismo. Sia x un punto di C e sia λ un autovalore di f_x (qui si usa l'ipotesi che il corpo di base è algebricamente chiuso). L'omomorfismo $f - \lambda \text{id}$ non è un isomorfismo e quindi deve essere identicamente nullo. Ciò significa che f è un'omotetia. $\square$

Sia $\mu \in \mathbb{Q}$, ed indichiamo con $\mathcal{C}(\mu)$ la categoria dei fibrati vettoriali semistabili di pendenza μ .

Proposizione 3.18. *Consideriamo una sequenza esatta di fibrati vettoriali*

$$0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0.$$

Se E e G sono oggetti di $\mathcal{C}(\mu)$, anche F lo è.

Dimostrazione. Dato che $\deg(F) = \deg(E) + \deg(G)$ e $\text{rk}(F) = \text{rk}(E) + \text{rk}(G)$, si ha $\mu(F) = \mu$. Dimostriamo ora che F è semistabile. Sia H un sottofibrato proprio di F e H_1 il suo sottofibrato semistabile massimale. Se

$\mu(H) > \mu(F) = \mu$, allora, per definizione di H_1 , è anche $\mu(H_1) > \mu$, e quindi, in base al punto (i) della Proposizione 3.17, si ha $\text{Hom}(H_1, G) = 0$. Da ciò si deduce che H_1 è un sottofibrato di E , il che è assurdo, dato che E è semistabile. $\square$

Proposizione 3.19. *La categoria $\mathcal{C}(\mu)$ è abeliana.*

Dimostrazione. In base a quanto già visto, è sufficiente dimostrare che ogni morfismo ha un nucleo ed un conucleo. Consideriamo quindi un morfismo non nullo $f : E \rightarrow F$ di fibrati vettoriali semistabili di pendenza μ . Si noti che i fasci $\text{Ker}(f)$ e $\text{Coker}(f)$ sono dei fibrati vettoriali se e solo se f ha rango costante, e ciò è lo stesso che dire che $\text{Coker}(f)$ è privo di torsione. Se T è il sottofascio di torsione di $\text{Coker}(f)$, poniamo

$$F' = \text{Ker}(F \rightarrow \text{Coker}(f)/T).$$

Dato che E è semistabile, si ha $\mu(\text{Im}(f)) \geq \mu(E)$ e, dato che anche F è semistabile, si ha $\mu(F') \leq \mu(F)$. Si ottiene quindi, ricordando che $\text{Im}(f) \subset F'$,

$$\mu(F) \geq \mu(F') \geq \mu(\text{Im}(f)) \geq \mu(E) = \mu(F) = \mu,$$

e pertanto vale ovunque il segno di uguaglianza. Da ciò si deduce che $\text{Im}(f) = F'$ e cioè $\text{Im}(f)$ è un sottofibrato di F , quindi f ha rango costante e, di conseguenza, $\text{Ker}(f)$ e $\text{Coker}(f)$ sono dei fibrati vettoriali.

Dimostriamo ora che $\text{Ker}(f)$ e $\text{Coker}(f)$ sono semistabili. Se così non fosse, $\text{Ker}(f)$ avrebbe un sottofibrato di pendenza $> \mu$, ma tale sottofibrato sarebbe anche un sottofibrato di E , il che sarebbe in contraddizione con la semistabilità di E . Analogamente $\text{Coker}(f)$ avrebbe un fibrato quoziente di pendenza $< \mu$, ma questo sarebbe anche un quoziente di F , contraddicendo la semistabilità di F . $\square$

In questa categoria abeliana le filtrazioni decrescenti sono stazionarie, dato che il rango è decrescente. Si dice allora che la categoria è artiniana. In una tale categoria esiste una nozione di *filtrazione di Jordan–Hölder*.

Lemma 3.20. *Sia E un fibrato vettoriale semistabile di pendenza μ . Esiste un sottofibrato $E_1 \subset E$, con $\mu(E_1) = \mu(E) = \mu$, che è stabile.*

Dimostrazione. Se E è stabile si ponga $E_1 = E$. Se E non è stabile esiste un sottofibrato proprio F_1 di E con $\mu(F_1) = \mu(E) = \mu$. Se F_1 è stabile si ponga $E_1 = F_1$, altrimenti deve esistere un sottofibrato proprio $F_2 \subset F_1$ con $\mu(F_2) = \mu$. Continuando in questo modo si deve arrivare ad un F_i che sia

stabile, altrimenti si otterrebbe una filtrazione decrescente non stazionaria di fibrati in $\mathcal{C}(\mu)$. $\square$

Sia dunque E un oggetto di $\mathcal{C}(\mu)$, e sia E_1 un sottofibrato stabile di E , con $\mu(E_1) = \mu(E) = \mu$. Allora E/E_1 è ancora un oggetto di $\mathcal{C}(\mu)$, e si può ripetere la costruzione appena fatta. Si ottiene così una sequenza strettamente crescente di sottofibrati vettoriali in $\mathcal{C}(\mu)$

$$0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k = E,$$

tali che E_i/E_{i-1} sia un fibrato stabile in $\mathcal{C}(\mu)$. Una tale filtrazione è detta *filtrazione di Jordan–Hölder* di E . L'intero k è la *lunghezza* della filtrazione e il fibrato vettoriale

$$\mathrm{Gr}(E) = \bigoplus_{i=1}^k E_i/E_{i-1}$$

è detto il *graduato* associato. Due fibrati vettoriali E e F tali che $\mathrm{Gr}(E) \cong \mathrm{Gr}(F)$ sono detti *S-equivalenti*. La relazione di *S-equivalenza* è una relazione di equivalenza.

Proposizione 3.21. *Sia E un fibrato vettoriale semistabile di pendenza μ . Tutte le filtrazioni di Jordan–Hölder di E hanno la stessa lunghezza k . Inoltre, se (E_i) e (E'_j) sono due filtrazioni di Jordan–Hölder con graduati associati $\bigoplus_i E_i/E_{i-1}$ e $\bigoplus_j E'_j/E'_{j-1}$, allora esiste una permutazione $\sigma \in S_k$ tale che*

$$E_i/E_{i-1} \cong E'_{\sigma(i)}/E'_{\sigma(i)-1}.$$

In particolare i due graduati associati sono isomorfi. Quindi la classe di isomorfismo dei graduati associati dipende solo da E (questo giustifica la notazione $\mathrm{Gr}(E)$).

Dimostrazione. Siano (E_i) e (E'_j) due filtrazioni di Jordan–Hölder di E , di lunghezze k e k' , rispettivamente. Sia j l'intero definito dalle condizioni

$$\begin{cases} E_1 \subset E'_j \\ E_1 \not\subset E'_{j-1}. \end{cases}$$

L'omomorfismo canonico

$$E_1 \rightarrow E'_j/E'_{j-1}$$

è dunque non nullo e, dato che E_1 e E'_j/E'_{j-1} sono fibrati stabili con la stessa pendenza, deve pertanto essere un isomorfismo. Consideriamo allora le

filtrazioni $(\bar{E}_i)$ e $(\bar{E}'_j)$ indotte sul quoziente E/E_1 . Si tratta ancora di filtrazioni di Jordan–Hölder di graduati associati $\bigoplus_{i \geq 2} E_i/E_{i-1}$ e $\bigoplus_{i \neq j} E'_i/E'_{i-1}$, rispettivamente. Il risultato si ottiene quindi per induzione sul rango: queste due filtrazioni hanno la stessa lunghezza e, di conseguenza, $k = k'$. Inoltre, dato che per l'ipotesi induttiva esiste una permutazione

$$\tau : \{2, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\} \setminus \{j\}$$

tale che

$$E_i/E_{i-1} \cong E'_{\tau(i)}/E'_{\tau(i)-1},$$

per ottenere $\sigma \in S_k$ basta prolungare τ ponendo $\sigma(1) = j$. $\square$

Terminiamo con un ultimo risultato che sarà utile nel seguito.

Proposizione 3.22. *Sia E un oggetto di $\mathcal{C}(\mu)$. Allora E è stabile se e solo se, per ogni oggetto E' di $\mathcal{C}(\mu)$ tale che $\text{Gr}(E') \cong \text{Gr}(E)$, si ha $E' \cong E$.*

Dimostrazione. Se E è stabile, allora $0 \subset E$ è una filtrazione di Jordan–Hölder di E , e quindi $\text{Gr}(E) \cong E$. Se E' è tale che $\text{Gr}(E') \cong \text{Gr}(E) \cong E$ allora, dato che E è stabile, $\text{Gr}(E')$ deve avere un solo addendo diretto; si ha quindi $\text{Gr}(E') \cong E'$, dunque $E' \cong E$.

Viceversa, supponiamo che E abbia la proprietà enunciata ma non sia stabile. Possiamo scrivere

$$\text{Gr}(E) = F_1 \oplus F_2,$$

ove F_1 è stabile e F_2 è somma diretta di fibrati stabili.

Se $E \not\cong F_1 \oplus F_2$, il fibrato $F_1 \oplus F_2$ ha lo stesso graduato di E ma non è isomorfo ad E , contraddicendo l'ipotesi. Se invece $E \cong F_1 \oplus F_2$, è sufficiente dimostrare che esistono delle estensioni non triviali

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_1 \oplus F_2 \rightarrow F_2 \rightarrow 0$$

oppure

$$0 \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \oplus F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow 0.$$

Bisogna quindi dimostrare che

$$H^1(C, F_2^* \otimes F_1) \neq 0,$$

oppure che

$$H^1(C, F_1^* \otimes F_2) \neq 0.$$

Dal punto (ii) della Proposizione 3.17 discende che

$$\dim H^0(C, F_1^* \otimes F_2) = \dim H^0(C, F_2^* \otimes F_1).$$

Dal teorema di Riemann–Roch segue allora che

$$\dim H^1(C, F_2^* \otimes F_1) - \dim H^1(C, F_1^* \otimes F_2) = 2\mu(\operatorname{rk}(F_1) - \operatorname{rk}(F_2)).$$

Se questa quantità è non nulla, allora uno degli interi $\dim H^1(C, F_2^* \otimes F_1)$ oppure $\dim H^1(C, F_1^* \otimes F_2)$ è diverso da zero. Nel caso contrario si ha

$$\chi(F_2^* \otimes F_1) = \operatorname{rk}(F_1) \operatorname{rk}(F_2)(1 - g) < 0,$$

e quindi, ancora, $\dim H^1(C, F_2^* \otimes F_1) \neq 0$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

3.8 Spazi di moduli: definizioni

Siano $r, d \in \mathbb{Z}$, con $r \geq 2$. Indichiamo con $S(r, d)$ l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati semistabili su C di rango r e grado d . Indichiamo inoltre con $S'(r, d)$ il sottoinsieme di $S(r, d)$ costituito dalle classi di isomorfismo dei fibrati stabili.

Osservazione 3.23. (i) Si osservi che, in base alle proprietà dei fibrati semistabili, la scelta di un fibrato in rette L di grado k su C permette di costruire delle biiezioni

$$S(r, d) \xrightarrow{\sim} S(r, d + rk)$$

e

$$S'(r, d) \xrightarrow{\sim} S'(r, d + rk),$$

definite associando ad un fibrato vettoriale E il fibrato $E \otimes L$.

(ii) Si noti inoltre che, se $(r, d) = 1$, allora, per una questione puramente aritmetica, si ha

$$S(r, d) = S'(r, d).$$

Diamo ora le definizioni precise del “problema di moduli” di cui ci occuperemo in seguito. Iniziamo definendo la nozione di equivalenza di famiglie:

Definizione 3.24. Sia dato un insieme $\mathcal{A}$ di fibrati vettoriali su C di rango fissato. Due famiglie $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ di elementi di $\mathcal{A}$ parametrizzate da uno schema S sono dette *equivalenti* se esiste un fascio invertibile L su S tale che

$$\mathcal{F}_2 \cong \mathcal{F}_1 \otimes p_S^*(L),$$

ove p_S indica la proiezione canonica, $p_S : S \times C \rightarrow S$. Scriveremo in tal caso $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$.

La definizione di equivalenza di famiglie appena data è del tutto sensata. Vale infatti il seguente risultato:

Lemma 3.25. *Siano $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ due fibrati vettoriali su $S \times C$ tali che, per ogni punto (chiuso) s di S , $(\mathcal{F}_1)_s$ è stabile e $(\mathcal{F}_1)_s \cong (\mathcal{F}_2)_s$. Allora esiste un fibrato in rette L su S tale che $\mathcal{F}_2 \cong \mathcal{F}_1 \otimes p_S^*(L)$, ove $p_S : S \times C \rightarrow S$ è la proiezione canonica.*

Dimostrazione. Ricordiamo che l'immagine diretta $p_*(F)$ di un fascio F su T , tramite un morfismo $p : T \rightarrow S$, è definita dalla condizione

$$\Gamma(U, p_*(F)) = \Gamma(p^{-1}(U), F),$$

per ogni aperto $U \subset S$. Da ciò si deduce l'esistenza di un omomorfismo naturale

$$p^*(p_*(F)) \rightarrow F.$$

Applicando quanto detto al fascio $\mathcal{H}om(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ e al morfismo $p_S : S \times C \rightarrow S$, e tensorizzando con $\mathcal{F}_1$, si ottiene un omomorfismo

$$\mathcal{F}_1 \otimes p_S^* p_{S*}(\mathcal{H}om(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)) \rightarrow \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{H}om(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2).$$

Componendo con l'omomorfismo naturale $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{H}om(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \rightarrow \mathcal{F}_2$, si ottiene un omomorfismo

$$h : \mathcal{F}_1 \otimes p_S^* p_{S*}(\mathcal{H}om(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)) \rightarrow \mathcal{F}_2.$$

Ricordando che, per ogni punto s , $(\mathcal{F}_1)_s$ e $(\mathcal{F}_2)_s$ sono due fibrati vettoriali stabili isomorfi, e ricordando le proprietà dei fibrati stabili, si deduce che:

- (i) ogni omomorfismo non nullo $(\mathcal{F}_1)_s \rightarrow (\mathcal{F}_2)_s$ è un isomorfismo,
- (ii) $\dim H^0(C, \mathcal{H}om((\mathcal{F}_1)_s, (\mathcal{F}_2)_s)) = 1$.

Da (ii) deriva che $p_{S*}(\mathcal{H}om(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2))$ è localmente libero e che la sua fibra nel punto $s \in S$ non è altro che $H^0(C, \mathcal{H}om((\mathcal{F}_1)_s, (\mathcal{F}_2)_s))$ (vedi [7, Cap. 3, Corollary 12.9]). Poniamo allora

$$L = p_{S*}(\mathcal{H}om(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2));$$

questo è un fibrato in rette su S . Si ha pertanto un omomorfismo

$$h : \mathcal{F}_1 \otimes p_S^*(L) \rightarrow \mathcal{F}_2.$$

Da (i) discende allora che h è un isomorfismo. $\square$

Le definizioni degli spazi di moduli date nell'Appendice B si possono, in questo caso, riformulare come segue:

Definizione 3.26. Uno *spazio di moduli buono* per $\mathcal{A}$ è il dato di uno schema M e di una famiglia $\mathcal{F}_M$ di elementi di $\mathcal{A}$ parametrizzata da M tale che, per ogni famiglia $\mathcal{F}$ di elementi di $\mathcal{A}$ parametrizzata da uno schema (di tipo finito) S esista un unico morfismo

$$\rho_{\mathcal{F}} : S \rightarrow M$$

tale che $\rho_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{F}_M) \sim \mathcal{F}$.

Sia $F_{\mathcal{A}}$ il funtore dalla categoria degli schemi noetheriani su $\mathbb{C}$ alla categoria degli insiemi che ad ogni schema S associa l'insieme delle classi di equivalenza delle famiglie di elementi di $\mathcal{A}$ parametrizzate da S (vedi Appendice B). Uno spazio di moduli buono non è altro che uno schema (noetheriano) M che rappresenta il funtore $F_{\mathcal{A}}$. È immediato provare che uno spazio di moduli buono è unico a meno di isomorfismo. La famiglia universale $\mathcal{F}_M$ è chiamata anche “fibrato di Poincaré”.

Definizione 3.27. Uno *spazio di moduli grossolano* per $\mathcal{A}$ è una trasformazione naturale di funtori

$$\Psi : F_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Hom}(\cdot, M),$$

ove M è uno schema noetheriano, tale che:

- (i) $\Psi(\text{Spec}(\mathbb{C})) : F_{\mathcal{A}}(\text{Spec}(\mathbb{C})) \rightarrow M(\mathbb{C})$ è una biiezione;

(ii) per ogni trasformazione naturale di funtori

$$\Psi' : F_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Hom}(\cdot, M'),$$

ove M' è uno schema noetheriano, esiste un unico morfismo

$$f : M \rightarrow M'$$

tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} F_{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\Psi} & \text{Hom}(\cdot, M) \\ & \searrow \Psi' & \downarrow \text{Hom}(\cdot, f) \\ & & \text{Hom}(\cdot, M') \end{array}$$

sia commutativo.

È immediato dimostrare che anche uno spazio di moduli grossolano è unico a meno di isomorfismo.

Osservazione 3.28. Finora abbiamo parlato di fibrati stabili e semistabili e delle loro proprietà. Non sappiamo nulla invece sulla loro esistenza. A questo riguardo ammetteremo, senza dimostrazione, il risultato seguente: per ogni curva C di genere $g \geq 2$ ed ogni $r, d \in \mathbb{Z}$, con $r \geq 2$, l'insieme $S'(r, d)$ non è vuoto. Per una dimostrazione, si veda [23]. Del caso $C = \mathbb{P}^1$ abbiamo già discusso, mentre del caso in cui la curva C abbia genere 1 ci occuperemo nella sezione seguente.

Illustriamo ora un fenomeno, noto sotto il nome di *fenomeno del salto*, che preclude, in generale, l'esistenza degli spazi di moduli.

Consideriamo una sequenza esatta corta di fibrati vettoriali

$$(3.3) \quad 0 \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0,$$

e sia $\omega \in \text{Ext}^1(F, G)$ la classe corrispondente (vedi Appendice A).

Consideriamo ora la famiglia di fibrati vettoriali E_t , $t \in \mathbb{C}$, ove E_t è l'estensione di F tramite G definita dall'elemento $t\omega \in \text{Ext}^1(F, G)$. Abbiamo visto nell'Osservazione A.3 che, per ogni $t \neq 0$, $E_t \cong E$, mentre, per $t = 0$, si ha $E_0 \cong G \oplus F$.

Se esistesse uno spazio di moduli M per le classi di isomorfismo di fibrati vettoriali su C , si otterrebbe un morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) & \rightarrow & M \\ t & \mapsto & [E_t]. \end{array}$$

Da ciò discende che, per continuità, i punti $[E]$ e $[G \oplus F]$ di M dovrebbero essere identificati.

Questo fatto preclude l'esistenza di uno spazio di moduli per le classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali su C .

Osservazione 3.29. Il “fenomeno del salto” è un fenomeno del tutto generale. Diamo un altro esempio, più semplice del precedente.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{C}$. Ci proponiamo di classificare gli automorfismi di V . Come è ben noto, un automorfismo di V corrisponde ad una matrice in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, modulo coniugazione per una matrice invertibile. Ogni matrice invertibile si può ridurre alla sua forma canonica di Jordan,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Per ogni $t \in \mathbb{C}$, poniamo

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

È chiaro che, per ogni $t \neq 0$ e $t' \neq 0$, le matrici A_t e $A_{t'}$ sono simili, mentre A_t non è simile alla matrice A_0 .

Osservazione 3.30. Si potrebbe pensare, a questo punto, che fosse sufficiente limitarsi a classificare fibrati vettoriali indecomponibili (un fibrato E è detto *indecomponibile* se non si può esprimere come somma diretta di due fibrati vettoriali non nulli). Purtroppo si può dimostrare che ciò non basta ad eliminare il fenomeno del salto, anche se diventa più difficile trovare degli esempi (vedi [15]).

Utilizzando il fenomeno del salto si può ancora fornire un risultato negativo riguardo l'esistenza di spazi di moduli di fibrati semistabili.

Proposizione 3.31. *Se $(r, d) \neq 1$, allora non esiste uno spazio di moduli grossolano per $S(r, d)$.*

Dimostrazione. Dato che $(r, d) \neq 1$, esistono due coppie di interi (r_1, d_1) e (r_2, d_2) , con $r_1 \geq 1$ e $r_2 \geq 1$, tali che

$$r_1 + r_2 = r, \quad d_1 + d_2 = d, \quad \frac{d_1}{r_1} = \frac{d_2}{r_2} = \frac{d}{r}.$$

Siano E_1 e E_2 due fibrati vettoriali stabili su C , di rango r_1 e r_2 e grado d_1 e d_2 rispettivamente. In base alla Proposizione 3.22, esiste un fibrato semistabile

E su C di rango r e grado d tale che $\text{Gr}(E) = E_1 \oplus E_2$, ma $E \not\cong E_1 \oplus E_2$ (se non esistesse un tale E si dedurrebbe che $E_1 \oplus E_2$ è stabile). In base a quanto visto in precedenza, si deduce che esiste un fibrato vettoriale $\mathcal{F}$ su $\mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \times C$, tale che $\mathcal{F}|_{\{0\} \times C} \cong E_1 \oplus E_2$ e $\mathcal{F}|_{\{t\} \times C} \cong E$, per ogni $t \neq 0$.

Supponiamo dunque che esista uno spazio di moduli grossolano M per $S(r, d)$ e sia $\rho : S(r, d) \rightarrow M$ la mappa naturale. La famiglia $\mathcal{F}$ determina un morfismo

$$\alpha : \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \rightarrow M,$$

e si ha $\alpha(0) = \rho(E_1 \oplus E_2)$ e $\alpha(t) = \rho(E)$, per ogni $t \neq 0$. Dato che α è un morfismo di schemi, si deve tuttavia avere, per continuità, $\alpha(0) = \rho(E)$, il che conduce ad una contraddizione. $\square$

3.9 Fibrati vettoriali sulle curve: il caso generale

Passiamo ora alla costruzione degli spazi di moduli dei fibrati vettoriali semistabili su una curva nel caso generale. Sia dunque C una curva proiettiva, irriducibile e liscia, di genere $g \geq 2$, definita su $\mathbb{C}$. Il primo passo consiste nel costruire una famiglia di fibrati vettoriali su C che contenga tutti gli elementi di $S(r, d)$. In base all'Osservazione 3.23, per studiare $S(r, d)$ è lecito supporre $d \gg 0$. Si ha allora:

Lemma 3.32. *Sia E un fibrato vettoriale semistabile su C di rango $r \geq 2$ e grado $d > r(2g - 1)$. Allora:*

- (i) E è generato dalle sue sezioni globali;
- (ii) $H^1(C, E) = 0$ e $\dim H^0(C, E) = d + r(1 - g)$.

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando (ii). Supponiamo che $H^1(C, E) \neq 0$. Per la dualità di Serre, si ha:

$$H^0(C, E^* \otimes K) = \text{Hom}(E, K) \neq 0,$$

ove K è il fibrato in rette canonico su C . L'esistenza di omomorfismi non nulli da E in K , e la semistabilità di E , implicano che

$$\mu(K) \geq \mu(E),$$

che equivale a

$$d \leq r(2g - 2).$$

Ma ciò è falso per l'ipotesi fatta su d . Questo dimostra che $H^1(C, E) = 0$. Utilizzando ora il teorema di Riemann–Roch, si dimostra la seconda asserzione.

Passiamo al punto (i). Ciò che si deve dimostrare è che, per ogni punto $P \in C$, l'omomorfismo canonico

$$r_P : H^0(C, E) \rightarrow E_P$$

è suriettivo.

Dalla sequenza esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-P) \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_P \rightarrow 0,$$

si ottiene la sequenza esatta

$$0 \rightarrow E(-P) \rightarrow E \rightarrow E_P \rightarrow 0,$$

la cui sequenza esatta lunga di coomologia fornisce

$$H^0(C, E) \rightarrow E_P \rightarrow H^1(C, E(-P)).$$

Notiamo che si ha

$$\deg E(-P) = \deg E + r \deg \mathcal{O}_C(-P) = d - r > r(2g - 2).$$

Come si è visto nel corso della dimostrazione del punto (ii), ciò implica che $H^1(C, E(-P)) = 0$, il che conclude la dimostrazione. $\square$

Con le stesse notazioni del lemma precedente, poniamo ora

$$p = d + r(1 - g).$$

Da quanto visto deriva che ogni fibrato E soddisfacente alle ipotesi del lemma precedente è isomorfo ad un quoziente di $H = \mathcal{O}_C \otimes \mathbb{C}^p$. Il polinomio di Hilbert di un tale fibrato è

$$P(t) = \chi(E(t)) = \dim H^0(C, E(t)) = rt \deg \mathcal{O}_C(1) + p,$$

e non dipende quindi dalla classe di E in $S(r, d)$.

A questo punto entrano in scena gli schemi “Quot”. Sia

$$Q = \text{Quot}_{H/C/\mathbb{C}}^P$$

lo schema che parametrizza le classi di isomorfismo dei fasci quozienti coerenti di H con polinomio di Hilbert $P = P(t)$. Su $Q \times C$ esiste una famiglia universale piatta $\mathcal{Q}$ di quozienti di H ,

$$\rho : p_C^*(H) \rightarrow \mathcal{Q},$$

ove $p_C : Q \times C \rightarrow C$ è la proiezione canonica.

Dato che ogni fibrato $E \in S(r, d)$ è isomorfo ad un quoziente di H , la famiglia universale $\mathcal{Q}$ contiene tutti gli elementi di $S(r, d)$. Tale famiglia contiene però anche quozienti coerenti di H che non sono localmente liberi. Si può tuttavia dimostrare che esiste un aperto R di Q caratterizzato dalla proprietà seguente: per ogni punto q di R il fascio $\mathcal{Q}_q$ (su $C_q = \{q\} \times C$) è localmente libero e l'applicazione canonica

$$H^0(C_q, H) \rightarrow H^0(C_q, \mathcal{Q}_q)$$

è un isomorfismo. Inoltre, la restrizione $\mathcal{V} = \mathcal{Q}|_R$ è un fascio localmente libero su $R \times C$ di rango r . Lo schema R , munito della famiglia universale $\mathcal{V}$, ha la proprietà universale locale espressa dalla proposizione seguente, per la cui dimostrazione si rimanda a [23, Proposition 21, pag. 25]:

Proposizione 3.33. *Dato uno schema noetheriano S su $\mathbb{C}$ ed un fascio localmente libero $\mathcal{F}$ di rango r su $S \times C$ tale che, per ogni punto s di S , si abbia*

- (i) $\mathcal{F}_s$ ha grado d ,
- (ii) $\mathcal{F}_s$ è generato dalle sue sezioni globali,
- (iii) $H^1(C, \mathcal{F}_s) = 0$,

per ogni punto s_0 di S esiste un intorno S_0 di s_0 in S ed un morfismo

$$f : S_0 \rightarrow R$$

tale che

$$\mathcal{F}|_{S_0 \times C} \cong (f \times \text{id}_C)^*(\mathcal{V}).$$

Lo schema R , con la famiglia universale $\mathcal{V}$, è molto vicino a quello che volevamo ottenere. Tuttavia tale famiglia è ancora troppo grande, dato che contiene anche fibrati che non sono semistabili. Bisognerà quindi, ancora una volta, restringersi a degli opportuni sottoinsiemi di R . Prima però soffermiamoci a studiare alcune proprietà di R .

Indichiamo con $\mathrm{GL}(p)$ il gruppo degli automorfismi di $H = \mathcal{O}_C \otimes \mathbb{C}^p$. Tale gruppo agisce sullo schema Q e sulla famiglia universale $\mathcal{Q}$ nel modo che ora descriveremo. Sia

$$\rho : p_C^*(H) \rightarrow \mathcal{Q},$$

l'omomorfismo canonico. Un elemento $A \in \mathrm{GL}(p)$ permette di costruire un'altra famiglia di quozienti, parametrizzata da Q , nel modo seguente: come fascio si consideri sempre $\mathcal{Q}$, ma come omomorfismo canonico si consideri la composizione

$$p_C^*(H) \xrightarrow{A^{-1}} p_C^*(H) \xrightarrow{\rho} \mathcal{Q}.$$

Dalla proprietà universale di Q si deduce l'esistenza di un automorfismo

$$\sigma_A : Q \rightarrow Q$$

e di un isomorfismo

$$\tau_A : \mathcal{Q} \rightarrow \sigma_A^*(\mathcal{Q}).$$

Esplicitamente, se q è il punto di Q corrispondente al quoziente

$$\rho : H \rightarrow E,$$

allora $\sigma_A(q)$ è il punto definito dal quoziente

$$\rho \circ A^{-1} : H \rightarrow E.$$

Analogamente non è difficile verificare che τ_A può essere descritto come segue: se z è un punto di $Q \times C$ e $\mathcal{Q}_z$ indica la fibra di $\mathcal{Q}$ al di sopra di z , allora, per ogni $u \in \mathcal{Q}_z$, si ha:

$$\tau_A(u) = Au.$$

Si noti che l'azione del sottogruppo $\mathbb{C}^* \cdot I$ di $\mathrm{GL}(p)$ su Q è triviale e, di conseguenza, l'azione di $\mathrm{GL}(p)$ su Q si fattorizza attraverso un'azione di $\mathrm{PGL}(p)$. Al contrario, l'azione di $\mathbb{C}^* \cdot I$ su $\mathcal{Q}$ non è triviale—tale gruppo agisce infatti per omotetie—e quindi l'azione di $\mathrm{GL}(p)$ su $\mathcal{Q}$ non ne determina una di $\mathrm{PGL}(p)$. Per quanto concerne il sottoschema R di Q , si dimostrano i seguenti risultati:

Proposizione 3.34. *L'aperto R di Q è $\mathrm{PGL}(p)$ -invariante. Inoltre, per ogni coppia (q_1, q_2) di punti (chiusi) di R , i fibrati vettoriali $\mathcal{Q}_{q_1}$ e $\mathcal{Q}_{q_2}$ sono isomorfi se e solo se q_1 e q_2 appartengono alla stessa orbita per l'azione di $\mathrm{PGL}(p)$ su R . Ancora, per ogni punto q di R , lo stabilizzatore di q per l'azione di $\mathrm{PGL}(p)$ è isomorfo a $\mathrm{Aut}(\mathcal{Q}_q)/\mathbb{C}^* \cdot I$.*

Per una dimostrazione si veda [22, Cap. 2, Proposizione 6], oppure [15, Theorem 5.3, pag. 138] (qui si trova anche una dimostrazione del fatto che R è aperto in Q).

Proposizione 3.35. *Lo schema R è una varietà quasi-proiettiva, irriducibile e liscia.*

La dimostrazione di quest'ultimo risultato si può trovare in [23].

Osservazione 3.36. Lo schema Q è una varietà proiettiva, quindi l'aperto R è una varietà quasi-proiettiva. La parte difficile è la dimostrazione dell'irriducibilità di R . Per quanto riguarda la non singolarità, questa discende da risultati generali, dimostrati da Grothendieck.

Sia q un punto di R , corrispondente alla sequenza esatta

$$(3.4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}_q \rightarrow H \rightarrow \mathcal{Q}_q \rightarrow 0.$$

Dai risultati di [6] deriva che lo spazio tangente $T_q R$ a R nel punto q è canonicamente isomorfo a $H^0(C, \mathcal{H}om(\mathcal{F}_q, \mathcal{Q}_q))$. Inoltre vi è un'ostruzione alla non singolarità di R nel punto q , che si trova nel gruppo $H^1(C, \mathcal{H}om(\mathcal{F}_q, \mathcal{Q}_q))$.

Ricordando che $H^1(C, \mathcal{Q}_q) = 0$, dalla sequenza esatta (3.4) si deduce che

$$H^1(C, \mathcal{H}om(\mathcal{F}_q, \mathcal{Q}_q)) = 0,$$

da cui segue che R è liscio. Si ha dunque

$$\dim R = \dim H^0(C, \mathcal{H}om(\mathcal{F}_q, \mathcal{Q}_q)),$$

da cui, applicando il teorema di Riemann–Roch, si deduce che

$$\dim R = p^2 + r^2(g - 1).$$

Dalla Proposizione 3.34 si vede come, per costruire uno schema i cui punti siano in corrispondenza biunivoca con le classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali di rango r e grado d su C , basterebbe costruire il quoziente $R/\mathrm{PGL}(p)$. Purtroppo, la teoria G.I.T. di Mumford (vedi [12]) mostra come

un tale quoziente non esista nella categoria degli schemi. Affinché si possa costruire il quoziente di uno schema per l'azione di un gruppo bisogna limitarsi a considerare degli opportuni sottoschemi; qui entrano in gioco i concetti di stabilità e semistabilità (per una breve introduzione alla teoria G.I.T. si rimanda all'Appendice C).

Introduciamo quindi due sottoschemi aperti di R : R^{ss} ed R^s . Essi sono definiti dalla condizione che l'insieme dei punti (chiusi) di R^{ss} (risp. di R^s) è costituito dai punti q di R tali che il fibrato vettoriale $\mathcal{Q}_q$ su C è semistabile (risp. stabile).

Dalla Proposizione 3.34 discende che R^{ss} e R^s sono invarianti per l'azione di $\mathrm{PGL}(p)$. Inoltre, in base al Lemma 3.32, è noto che, per ogni fibrato vettoriale E su C la cui classe di isomorfismo appartiene a $S(r, d)$, esiste un punto q di R^{ss} tale che $\mathcal{Q}_q$ sia isomorfo a E . Si può pertanto affermare che R^{ss} (risp. R^s) “contiene” tutti i fibrati semistabili (risp. stabili) di rango r e grado d su C . Ancora la Proposizione 3.34 permette di concludere che

$$S(r, d) = R^{ss} / \mathrm{PGL}(p), \quad S'(r, d) = R^s / \mathrm{PGL}(p).$$

Come sopra accennato, per ottenere dei quozienti “algebrici” bisogna ricorrere alla teoria G.I.T. di Mumford, la quale afferma che si può costruire il quoziente per l'azione di $\mathrm{PGL}(p)$ solo del sottoschema di R i cui punti sono “semistabili” rispetto all'azione suddetta. Il risultato fondamentale—che è anche il più difficile da dimostrare—che lega le due teorie è contenuto nella proposizione seguente, la cui dimostrazione si può trovare in [23]:

Proposizione 3.37. *I punti semistabili (risp. stabili) di R per l'azione di $\mathrm{PGL}(p)$ corrispondono ai fibrati vettoriali semistabili (risp. stabili) su C .*

La teoria di Mumford fornisce allora il seguente risultato:

Proposizione 3.38. (i) *Esiste un buon quoziente $(\mathcal{U}(r, d), f)$ di R^{ss} . La varietà $\mathcal{U}(r, d)$ è una varietà proiettiva.*

(ii) *Se poniamo $\mathcal{U}_s(r, d) = f(R^s)$, allora $\mathcal{U}_s(r, d)$ è un sottoschema aperto di $\mathcal{U}(r, d)$. La coppia $(\mathcal{U}_s(r, d), f|_{R^s})$ è un quoziente geometrico.*

(iii) *Esiste una mappa suriettiva naturale*

$$g : S(r, d) \rightarrow \mathcal{U}(r, d)(\mathbb{C}),$$

ove $\mathcal{U}(r, d)(\mathbb{C})$ indica l'insieme dei punti di $\mathcal{U}(r, d)$ a valori in $\mathbb{C}$. Si ha inoltre:

$$S'(r, d) = g^{-1}(\mathcal{U}_s(r, d)(\mathbb{C})),$$

e g induce una biiezione $S'(r, d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_s(r, d)(\mathbb{C})$.

Si ottiene così il seguente risultato:

Teorema 3.39. *Siano $r, d \in \mathbb{Z}$, con $r \geq 2$. Esiste uno spazio di moduli grossolano $\mathcal{U}_s(r, d)$ per $S'(r, d)$. $\mathcal{U}_s(r, d)$ è una varietà quasi-proiettiva liscia. Essa ha una compattificazione naturale $\mathcal{U}(r, d)$. L'insieme dei punti di $\mathcal{U}(r, d)$ a valori in $\mathbb{C}$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle classi di S -equivalenza dei fibrati vettoriali di rango r e grado d su C .*

Si osservi che la condizione (i) della definizione di spazio di moduli grossolano, cioè il fatto che i punti a valori in $\mathbb{C}$ di $\mathcal{U}_s(r, d)$ corrispondano alle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali stabili, è stato appena stabilito (punto (iii) della Proposizione 3.38). La condizione (ii), ossia la proprietà universale, deriva immediatamente dalla proprietà universale del quoziente $\mathcal{U}_s(r, d)$. Il fatto che $\mathcal{U}_s(r, d)$ sia liscia e irriducibile discende dal fatto che lo stesso vale per lo schema R (e da risultati generali di G.I.T.).

Certamente $\mathcal{U}(r, d)$ è una compattificazione naturale di $\mathcal{U}_s(r, d)$, essendo una varietà proiettiva che contiene $\mathcal{U}_s(r, d)$. Si noti tuttavia che $\mathcal{U}(r, d)$ non è uno spazio di moduli grossolano per $S(r, d)$, dato che la mappa naturale

$$g : S(r, d) \rightarrow \mathcal{U}(r, d)$$

non è biiettiva. In effetti vale il risultato seguente (vedi [23, Proposizione 32, pag. 35]):

Proposizione 3.40. *Siano E_1 e E_2 due fibrati vettoriali su C tali che le loro classi di isomorfismo $[E_1]$ e $[E_2]$ appartengano a $S(r, d)$. Allora si ha*

$$g([E_1]) = g([E_2])$$

se e solo se

$$\mathrm{Gr}(E_1) \cong \mathrm{Gr}(E_2).$$

Come ultima cosa vogliamo ora dimostrare il seguente risultato:

Teorema 3.41. *Siano $r, d \in \mathbb{Z}$, con $r \geq 2$ e $(r, d) = 1$. Allora esiste uno spazio di moduli buono per $S(r, d)$.*

Dimostrazione. Notiamo subito che, se r e d sono coprimi, i concetti di stabilità e semistabilità coincidono e quindi $\mathcal{U}_s(r, d) = \mathcal{U}(r, d)$ (vedi Osservazione 3.23 (ii)). Si tratta ora, innanzitutto, di costruire un fibrato di Poincaré

su $\mathcal{U}(r, d)$. Si ricordi che su R^s esiste un fibrato quoziente universale $\mathcal{V}$. Dato che $\mathcal{U}(r, d)$ è ottenuto quozientando R^s per l'azione di $\mathrm{PGL}(p)$, si tratterebbe di quozientare anche il fibrato $\mathcal{V}$. Purtroppo abbiamo visto che su $\mathcal{V}$ agisce il gruppo $\mathrm{GL}(p)$ e tale azione non ne determina una di $\mathrm{PGL}(p)$, in quanto l'azione del sottogruppo $\mathbb{C}^* \cdot I$ non è triviale (esso agisce infatti per omotetie).

Questo problema si può risolvere considerando il fibrato $\mathcal{V}'$ su R^s definito mediante

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} \otimes p_R^*(L^{-1}),$$

ove L è un fibrato in rette su R^s sul quale $\mathrm{GL}(p)$ agisce linearmente, in modo che il sottogruppo $\mathbb{C}^* \cdot I$ agisca per omotetie, e $p_R : R^s \times C \rightarrow R^s$ è la proiezione canonica. In tal modo si ottiene un'azione di $\mathrm{PGL}(p)$ su $\mathcal{V}'$, e si può così costruire un fibrato quoziente.

Rimane, a questo punto, il problema di costruire il fibrato L , e questo si potrà fare solo se $(r, d) = 1$.

Sia N un fibrato in rette di grado 1 su C . Indichiamo con $p_R : R^s \times C \rightarrow R^s$ e $p_C : R^s \times C \rightarrow C$ le proiezioni canoniche. I fasci $p_{R*}(\mathcal{V})$ e $p_{R*}(\mathcal{V} \otimes p_C^*(N))$ sono localmente liberi (ciò deriva dal fatto che sono nulli i gruppi $H^1(C, \mathcal{V}_q)$ e $H^1(C, \mathcal{V}_q \otimes N)$) di rango

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}(p_{R*}(\mathcal{V})) &= \dim H^0(C, \mathcal{V}_q) = d + r(1 - g), \\ \mathrm{rk}(p_{R*}(\mathcal{V} \otimes p_C^*(N))) &= \dim H^0(C, \mathcal{V}_q \otimes N) = d + r(2 - g). \end{aligned}$$

Dato che il gruppo $\mathbb{C}^* \cdot I$ agisce per omotetie su $\mathcal{V}$, la sua azione sul fibrato in rette $\det(p_{R*}(\mathcal{V}))$ è determinata dalla moltiplicazione per $\lambda^{d+r(1-g)}$, mentre quella su $\det(p_{R*}(\mathcal{V} \otimes p_C^*(N)))$ è data dalla moltiplicazione per $\lambda^{d+r(2-g)}$, al variare di λ in $\mathbb{C}^*$.

Ricordando che r e d sono coprimi, si deduce che esistono due interi a e b tali che

$$a(d + r(1 - g)) + b(d + r(2 - g)) = 1.$$

È allora sufficiente porre

$$L = (\det(p_{R*}(\mathcal{V})))^{\otimes a} \otimes (\det(p_{R*}(\mathcal{V} \otimes p_C^*(N))))^{\otimes b},$$

per ottenere un fibrato in rette su cui $\mathbb{C}^* \cdot I$ agisce per omotetie.

A questo punto si osservi che il morfismo

$$g \times \mathrm{id}_C : R^s \times C \rightarrow \mathcal{U}(r, d) \times C$$

è piatto, dato che le varietà R^s e $\mathcal{U}(r, d)$ sono lisce e le fibre di g hanno tutte la stessa dimensione. Si può quindi applicare la “teoria della discesa per morfismi fedelmente piatti” di Grothendieck [5], ottenendo così l’esistenza di un fibrato vettoriale $\mathcal{W}$ su $\mathcal{U}(r, d) \times C$ tale che

$$\mathcal{V}' \cong (g \times \text{id}_C)^*(\mathcal{W}).$$

Ora rimane solo da dimostrare che il dato del fibrato $\mathcal{W}$ su $\mathcal{U}(r, d)$ definisce uno spazio di moduli buono per $S(r, d)$.

Sia dunque S uno schema noetheriano su $\mathbb{C}$ e $\mathcal{F}$ una famiglia di elementi di $S(r, d)$ parametrizzata da S . Dato che $\mathcal{U}(r, d) = \mathcal{U}_s(r, d)$ è uno spazio di moduli grossolano, esiste un morfismo

$$f : S \rightarrow \mathcal{U}(r, d)$$

tale che, per ogni punto (chiuso) s di S , il fibrato $\mathcal{F}_s$ sia isomorfo al fibrato $\mathcal{W}_{f(s)}$. Dal fatto che un fibrato stabile è semplice, si deduce che il fascio $p_{S*}(\mathcal{H}om(f^*(\mathcal{W}), \mathcal{F}))$ è invertibile, ove $p_S : S \times C \rightarrow S$ è la proiezione canonica. Come già visto nella dimostrazione del Lemma 3.25, da ciò segue che

$$\mathcal{F} \cong f^*(\mathcal{W}) \otimes p_S^*(p_{S*}(\mathcal{H}om(f^*(\mathcal{W}), \mathcal{F}))),$$

e quindi $\mathcal{F} \sim f^*(\mathcal{W})$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Osservazione 3.42. Il metodo usato per costruire gli spazi di moduli $\mathcal{U}(r, d)$ può essere brevemente riassunto come segue: dapprima si aggiunge dell’ulteriore struttura agli oggetti in esame; invece di considerare fibrati vettoriali E su C si considerano quozienti

$$\mathcal{O}_C \otimes \mathbb{C}^p \rightarrow E \rightarrow 0.$$

In questo modo ci si riduce ad un problema di moduli più facile da trattare, oppure già noto; nel caso in questione si tratta degli schemi “Quot” di Grothendieck. Successivamente si elimina la struttura che era stata aggiunta; di solito questo si traduce nel fatto che sullo spazio di moduli così trovato vi è l’azione di un gruppo e gli oggetti che interessano sono le orbite di tale azione. Ci si trova quindi di fronte al problema di costruire il quoziente di uno schema per l’azione di un gruppo. Qui interviene la teoria G.I.T. di Mumford, che chiarisce in quali condizioni sia possibile costruire il quoziente appena citato. Usualmente è a questo punto che intervengono i concetti di stabilità e semistabilità.

Questo tipo di approccio, che noi abbiamo descritto nel caso degli spazi di moduli dei fibrati vettoriali, è comune a molti altri problemi di moduli in geometria algebrica.

3.10 Studio infinitesimale degli spazi di moduli

Utilizzando i risultati generali dimostrati da Grothendieck [6] sulle proprietà infinitesimali degli schemi “Quot”, e la teoria G.I.T. di Mumford, si può dimostrare che la varietà $\mathcal{U}_s(r, d)$ è non singolare, ha dimensione pari a $r^2(g-1)+1$ e che lo spazio tangente ad essa nel punto $[E]$, corrispondente alla classe di isomorfismo di un fibrato vettoriale E , è canonicamente isomorfo al primo gruppo di coomologia $H^1(C, \mathcal{E}nd(E))$.

In questa sezione ci proponiamo di dare una dimostrazione diretta di tali risultati.

Sia $\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ l’anello dei numeri duali su $\mathbb{C}$. Per comodità di notazione nel seguito sarà indicato semplicemente con $\mathbb{C}[\epsilon]$. Indichiamo con C_ϵ il prodotto fibrato $C \times \text{Spec}(\mathbb{C}[\epsilon])$. Se $p_\epsilon : C_\epsilon \rightarrow C$ è il morfismo naturale e F è un fibrato vettoriale su C , indicheremo con $F[\epsilon]$ il rialzamento di F a C_ϵ :

$$F[\epsilon] = p_\epsilon^*(F).$$

Definizione 3.43. Una *deformazione infinitesima (lineare)* di un fibrato vettoriale E su C è un fibrato vettoriale E_ϵ su C_ϵ , con il dato di un isomorfismo

$$E \cong E_\epsilon \otimes_{\mathbb{C}[\epsilon]} \mathbb{C}.$$

Diremo semplicemente che E_ϵ si restringe ad E .

Un isomorfismo tra due deformazioni infinitesime E'_ϵ ed E''_ϵ di E è un isomorfismo di fibrati vettoriali $\lambda_\epsilon : E'_\epsilon \rightarrow E''_\epsilon$ che si restringe all’identità su E .

Proposizione 3.44. *Le classi di isomorfismo delle deformazioni infinitesime di un fibrato vettoriale E su C sono canonicamente parametrizzate dal primo gruppo di coomologia $H^1(C, \mathcal{E}nd(E))$.*⁴

Dimostrazione. Sia E_ϵ una deformazione infinitesima di E . Consideriamo un ricoprimento $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di C con sottoinsiemi aperti affini $U_i = \text{Spec}(A_i)$, e poniamo $U_{ij} = U_i \cap U_j = \text{Spec}(A_{ij})$. I sottoinsiemi aperti affini $U_i[\epsilon] = \text{Spec}(A_i[\epsilon])$ costituiscono un ricoprimento aperto affine dello schema C_ϵ . Ponendo $M_i = \Gamma(U_i, E)$, $M_{ij} = \Gamma(U_{ij}, E)$, per ogni $i \in I$, si ha un isomorfismo

$$f_i : E_\epsilon|_{U_i[\epsilon]} \xrightarrow{\sim} \widetilde{M_i[\epsilon]}.$$

⁴Un risultato analogo, e con la stessa dimostrazione, vale qualora si sostituisca la curva C con una qualunque varietà X .

Allora $f_j|_{U_{ij}[\epsilon]} \circ f_i^{-1}|_{U_{ij}[\epsilon]}$ induce un automorfismo di $\widetilde{M_{ij}[\epsilon]}$, che corrisponde ad un elemento della forma $1 + \epsilon \eta_{ij} \in \text{End}(M_{ij}[\epsilon])$. Le condizioni di compatibilità sull'intersezione di tre aperti mostrano che $\{\eta_{ij}\}$ è un 1-cociclo di Čech a valori in $\mathcal{E}nd(E)$.

È facile dimostrare che due deformazioni infinitesime di E tra loro isomorfe determinano due cocicli che differiscono per un cobordo e definiscono pertanto lo stesso elemento di $H^1(C, \mathcal{E}nd(E))$.

Viceversa, dato un 1-cociclo $\{\eta_{ij}\}$ a valori in $\mathcal{E}nd(E)$, il corrispondente fascio localmente libero E_ϵ può essere costruito incollando i fasci $\widetilde{M_i[\epsilon]}$ e $\widetilde{M_j[\epsilon]}$ lungo gli aperti $U_{ij}[\epsilon]$ tramite gli isomorfismi

$$1 + \epsilon \eta_{ij} : \widetilde{M_i[\epsilon]}|_{U_{ij}[\epsilon]} \xrightarrow{\sim} \widetilde{M_j[\epsilon]}|_{U_{ij}[\epsilon]}.$$

Le due costruzioni sono, ovviamente, l'inversa l'una dell'altra. $\square$

Dalla proprietà universale che caratterizza gli spazi di moduli, discende immediatamente il seguente risultato:

Corollario 3.45. *Sia $[E] \in \mathcal{U}_s(r, d)$ il punto corrispondente alla classe di isomorfismo di un fibrato vettoriale E . Si ha un'identificazione canonica*

$$T_{[E]}\mathcal{U}_s(r, d) \cong H^1(C, \mathcal{E}nd(E)).$$

Utilizzando il teorema di Riemann–Roch, si può calcolare la dimensione dello spazio tangente $T_{[E]}\mathcal{U}_s(r, d)$. Si ha, infatti:

$$\dim H^0(C, \mathcal{E}nd(E)) - \dim H^1(C, \mathcal{E}nd(E)) = r^2(1 - g),$$

da cui, ricordando che l'ipotesi di stabilità di E implica che $H^0(C, \mathcal{E}nd(E)) \cong \mathbb{C}$, segue che

$$\dim H^1(C, \mathcal{E}nd(E)) = r^2(g - 1) + 1.$$

La dimensione dello spazio tangente $T_{[E]}\mathcal{U}_s(r, d)$ è dunque costante, al variare di $[E]$ in $\mathcal{U}_s(r, d)$; ne deriva che la varietà $\mathcal{U}_s(r, d)$ è non singolare ed ha dimensione $r^2(g - 1) + 1$.

Osservazione 3.46. Si noti che, per $g = 0$, la formula precedente fornisce

$$\dim \mathcal{U}_s(r, d) = 1 - r^2,$$

che è negativo per $r \geq 2$. Ciò è consistente col fatto che, su $\mathbb{P}^1$, gli unici fibrati vettoriali stabili sono i fibrati in rette.

3.11 Fibrati vettoriali sulle curve ellittiche

Come nel caso dei fibrati vettoriali sulla retta proiettiva, lo studio dei fibrati vettoriali su una curva ellittica utilizza tecniche che non sono applicabili al caso generale. Daremo in questa sezione solo un riassunto dei principali risultati noti, rimandando ai lavori originali di Atiyah [1] e Tu [24] per le dimostrazioni.

Sia C una curva ellittica ed indichiamo con $\mathcal{E}(r, d)$ l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali indecomponibili su C , di rango r e grado d (ricordiamo che un fibrato vettoriale è detto *indecomponibile* se non è somma diretta di due sottofibrati propri). Atiyah ha classificato tali fibrati⁵, dimostrando il seguente risultato:

Teorema 3.47. *Ogni insieme $\mathcal{E}(r, d)$ può essere identificato con C in modo tale che la mappa*

$$\det : \mathcal{E}(r, d) \rightarrow \mathcal{E}(1, d) = J^d(C)$$

corrisponda alla mappa

$$H : C \rightarrow C$$

definita ponendo $H(P) = hP = P + P + \dots + P$ (h volte), ove $h = (r, d)$.

Il legame tra le nozioni di indecomponibilità e stabilità è dato dalla seguente proposizione, la cui dimostrazione si può trovare in [24, Appendix A]:

Proposizione 3.48. *Ogni fibrato vettoriale indecomponibile su una curva ellittica è semistabile. Esso è stabile se e solo se il suo rango e grado sono coprimi.*

Per quanto riguarda la classificazione dei fibrati vettoriali (semi)stabili, Tu dimostra i risultati seguenti:

Teorema 3.49. *Lo spazio di moduli $\mathcal{U}(r, d)$ delle classi di S -equivalenza dei fibrati vettoriali semistabili di rango r e grado d su una curva ellittica C è isomorfo al prodotto simmetrico $\text{Sym}^h(C)$, ove $h = (r, d)$.*

Se indichiamo con $\mathcal{U}_s(r, d) \subset \mathcal{U}(r, d)$ il sottoinsieme (aperto) che parametrizza le classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali stabili, si ha:

$$\mathcal{U}_s(r, d) \cong \begin{cases} \emptyset & \text{se } (r, d) \neq 1, \\ C & \text{se } (r, d) = 1. \end{cases}$$

⁵All'epoca in cui Atiyah ha scritto [1] il concetto di (semi)stabilità non esisteva ancora. Esso verrà introdotto solo più tardi da Mumford.

Teorema 3.50. *Tramite la scelta di opportuni isomorfismi $\mathcal{U}(r, d) \cong \text{Sym}^h(C)$ e $J^d(C) \cong J^h(C)$, l'applicazione*

$$\det : \mathcal{U}(r, d) \rightarrow J^d(C)$$

può essere identificata con la mappa di Abel–Jacobi. In altri termini, si ha un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(r, d) & \xrightarrow{\sim} & \text{Sym}^h(C) \\ \det \downarrow & & \alpha \downarrow \\ J^d(C) & \xrightarrow{\sim} & J^h(C), \end{array}$$

ove $\alpha : \text{Sym}^h(C) \rightarrow J^h(C)$ è l'applicazione che associa ad un divisore effettivo di grado h la classe di isomorfismo del fascio invertibile corrispondente.

Osservazione 3.51. C'è ancora un altro caso in cui si ha una descrizione esplicita degli spazi di moduli dei fibrati vettoriali su una curva: quello dei fibrati vettoriali di rango 2 su una curva iperellittica (per i fibrati vettoriali di rango 1 su una curva iperellittica C , una descrizione esplicita dello spazio di moduli, ossia della varietà jacobiana $J(C)$, è stata fornita da Mumford in [11]). Ci limiteremo qui a riportare, a titolo di esempio, un solo risultato, rimandando a [2] per una trattazione più approfondita.

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_{2g+2}$, con $g \geq 2$, dei punti a due a due distinti di $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ e sia C la curva proiettiva liscia e irriducibile ottenuta come ricoprimento doppio di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, ramificato nei punti $\lambda_1, \dots, \lambda_{2g+2}$. Indichiamo con Q_1 e Q_2 le due quadriche di $\mathbb{P}^{2g+1}(\mathbb{C})$ di equazioni

$$Q_1 : \sum_{i=1}^{2g+2} x_i^2 = 0, \quad Q_2 : \sum_{i=1}^{2g+2} \lambda_i x_i^2 = 0.$$

Allora lo spazio di moduli $\mathcal{U}(2, L)$, che parametrizza le classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali stabili su C di rango 2 e determinante isomorfo al fibrato in rette L , di grado dispari, è isomorfo alla varietà dei sottospazi di dimensione $g - 2$ di $\mathbb{P}^{2g+1}(\mathbb{C})$, contenuti nell'intersezione delle due quadriche Q_1 e Q_2 .

Appendice A

Estensioni di fasci

Sia X una varietà (algebrica). Nel seguito chiameremo semplicemente *fasci* su X i fasci di $\mathcal{O}_X$ -moduli.

Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci su X . Indicheremo con $\text{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ i funtori derivati destri del funtore $\mathcal{G} \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Se

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{I}^\bullet$$

è una risoluzione iniettiva di $\mathcal{G}$, si ha:

$$\text{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = H^i(\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^\bullet)).$$

Se $\mathcal{F}$ è un fascio localmente libero, allora

$$\text{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = H^i(X, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})),$$

ove $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ indica il *fascio* degli omomorfismi di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$.

Definizione A.1. Una *estensione* di $\mathcal{F}$ tramite $\mathcal{G}$ è una sequenza esatta corta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{i} \mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Diremo allora semplicemente che $\mathcal{E}$ è un'estensione di $\mathcal{F}$ tramite $\mathcal{G}$.

Se $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ sono due estensioni di $\mathcal{F}$ tramite $\mathcal{G}$, un *omomorfismo di estensioni* è un omomorfismo $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow = & & \downarrow f & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{E}' & \longrightarrow & \mathcal{F} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Indicheremo con $\mathbf{Ext}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ l'insieme delle classi di isomorfismo delle estensioni di $\mathcal{F}$ tramite $\mathcal{G}$.

Proposizione A.2. *C'è un isomorfismo canonico*

$$\mathbf{Ext}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Dimostrazione. Sia data un'estensione

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{i} \mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Applicando il funtore $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \cdot)$, si ottiene una sequenza esatta lunga

$$\cdots \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \cdots.$$

Poniamo $\omega = \partial(\mathrm{id}_{\mathcal{F}})$. Questo elemento dipende solo dalla classe di isomorfismo dell'estensione data. Si ha così una mappa

$$\Phi : \mathbf{Ext}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Viceversa, sia $\omega \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Fissata una risoluzione iniettiva

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{I}.$$

di $\mathcal{G}$, possiamo rappresentare la classe ω con un elemento $w \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^1)$ tale che $dw = 0$, ove d è il differenziale del complesso $\mathcal{I}$. Si ottiene così la seguente sequenza esatta corta di complessi:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^2 & \xrightarrow{=} & \mathcal{I}^2 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^1 & \xrightarrow{=} & \mathcal{I}^1 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow d & & \uparrow (d, w) & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^0 \oplus \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Poniamo $\mathcal{E}_w = \mathrm{Ker}(d, w)$. Considerando la sequenza esatta lunga di coomologia associata alla sequenza esatta corta di complessi precedente, si ottiene

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}_w \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

cioè un'estensione di $\mathcal{F}$ tramite $\mathcal{G}$.

Se w' è un altro rappresentante della classe ω , si ha $w' = w + dg$, ove $g \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^0)$. Si ha dunque un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}^1 & \xrightarrow{=} & \mathcal{I}^1 \\ \uparrow (d, w') & & \uparrow (d, w) \\ \mathcal{I}^0 \oplus \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{I}^0 \oplus \mathcal{F}, \end{array}$$

ove ϕ è dato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \text{id} & g \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}.$$

Da ciò si deduce che ϕ induce un isomorfismo

$$\phi : \mathcal{E}_{w'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_w,$$

compatibile con le estensioni associate.

Abbiamo così ottenuto un'applicazione

$$\Psi : \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{Ext}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Si tratta ora di dimostrare che Ψ è l'inversa di Φ .

Consideriamo un'estensione $\mathcal{E}$ di $\mathcal{F}$ tramite $\mathcal{G}$,

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{i} \mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Dato che $\mathcal{I}^0$ è un $\mathcal{O}_X$ -modulo iniettivo, l'omomorfismo $\epsilon : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}^0$ si estende ad un omomorfismo $\eta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{I}^0$. L'omomorfismo $d\eta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{I}^1$ si annulla su $\mathcal{G}$, quindi definisce un morfismo $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^1$, che sarà indicato con $-w$. Si ha dunque $d\eta + wp = 0$, oltre che, ovviamente $dw = 0$.

Si ha allora una sequenza esatta corta di complessi

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^1 & \xrightarrow{=} & \mathcal{I}^1 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow d & & \uparrow (d, w) & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^0 \oplus \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \epsilon & & \uparrow (\eta, p) & & \uparrow = \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{i} & \mathcal{E} & \xrightarrow{p} & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Se indichiamo con $\mathcal{J}^\cdot$ la risoluzione di $\mathcal{E}$ indicata nel diagramma precedente, il calcolo di $\omega = \partial(\text{id}_{\mathcal{F}})$ si effettua attraverso il diagramma del serpente nella sequenza esatta di complessi

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{J}^\cdot) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{J}^\cdot) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

Sviluppati i calcoli, si trova che l'immagine tramite Φ dell'estensione di partenza non è altro che la classe ω definita da w in $\text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Risulta allora evidente, dalla costruzione della mappa Ψ , che l'estensione associata a ω tramite Ψ è l'estensione da cui siamo partiti. Questo dimostra che $\Psi \circ \Phi = \text{id}$.

Viceversa, partendo da una classe $\omega = [w] \in \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, si può scegliere come $\eta : \mathcal{E}_w \rightarrow \mathcal{J}^0$ la prima componente dell'inclusione

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_w \rightarrow \mathcal{J}^0 \oplus \mathcal{F} \xrightarrow{(d,w)} \mathcal{J}^1.$$

Si ha dunque $d\eta + wp = 0$ da cui, attraverso il diagramma del serpente, si deduce che l'omomorfismo $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}^1$ associato non è altro che w . Quindi $\Phi \circ \Psi = \text{id}$. $\square$

Osservazione A.3. Sia $\omega = [w] \in \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ e

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}_w \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

l'estensione definita da ω . Usando le notazioni della dimostrazione precedente, il fascio $\mathcal{E}_w$ è definito dalla sequenza esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_w \rightarrow \mathcal{J}^0 \oplus \mathcal{F} \xrightarrow{(d,w)} \mathcal{J}^1.$$

Dato che $\text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ è un $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale, si consideri, al variare di $t \in \mathbb{C}$, la famiglia di estensioni $\mathcal{E}_{tw}$, determinate da $t\omega = [tw]$.

Il fascio $\mathcal{E}_{tw}$ è quindi definito dalla sequenza esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_{tw} \rightarrow \mathcal{J}^0 \oplus \mathcal{F} \xrightarrow{(d,tw)} \mathcal{J}^1.$$

Considerando il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_{tw} & \longrightarrow & \mathcal{J}^0 \oplus \mathcal{F} & \xrightarrow{(d,tw)} & \mathcal{J}^1 \\ & & & & \downarrow (\text{id}, t) & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_w & \longrightarrow & \mathcal{J}^0 \oplus \mathcal{F} & \xrightarrow{(d,w)} & \mathcal{J}^1, \end{array}$$

si deduce immediatamente che, per $t \neq 0$, i fasci $\mathcal{E}_{tw}$ ed $\mathcal{E}_w$ sono isomorfi (come fasci, non come estensioni) mentre, per $t = 0$, si ha $\mathcal{E}_0 \cong \mathcal{G} \oplus \mathcal{F}$.

Appendice B

Spazi di moduli

In questa sezione vogliamo cercare di descrivere ciò che si intende, in generale, per un “problema di moduli” in geometria algebrica (la trattazione che segue è un po’ euristica, ma serve allo scopo di introdurre il tipo di problemi in questione, senza appesantire troppo il discorso con dettagli tecnici. Delle definizioni più precise sono fornite, nel caso degli spazi di moduli dei fibrati vettoriali sulle curve, nel Cap. 3).

Sia $\mathcal{A}$ una collezione di “oggetti geometrici” e $\sim$ una relazione di equivalenza su $\mathcal{A}$. La nozione fondamentale, in un problema di moduli, è quella di *famiglia di oggetti di $\mathcal{A}$ parametrizzata da una varietà S* : si tratta di una corrispondenza che ad ogni punto $s \in S$ associa un oggetto $\mathcal{F}_s \in \mathcal{A}$, in modo tale che gli oggetti $\mathcal{F}_s$ siano “collegati” tra loro in una maniera che rifletta, in qualche modo, la struttura della varietà S .

Questa idea-guida generale deve essere precisata caso per caso.

Consideriamo, a titolo di esempio, il caso in cui $\mathcal{A}$ è l’insieme di tutti i fibrati vettoriali su una varietà algebrica X . Come relazione di equivalenza su $\mathcal{A}$ scegliamo la relazione di isomorfismo. L’idea precedente può essere tradotta nella seguente definizione.

Definizione B.1. Una *famiglia di fibrati vettoriali su X parametrizzata da una varietà S* è un fibrato vettoriale $\mathcal{F}$ su $S \times X$.

In corrispondenza ad ogni $s \in S$ si ottiene un fibrato vettoriale $\mathcal{F}_s$ su X ponendo

$$\mathcal{F}_s = \mathcal{F}|_{\{s\} \times X}.$$

In questo caso il summenzionato “legame” tra i vari fibrati $\mathcal{F}_s$ è dato dal fatto che sono tutti ottenuti per restrizione da un unico fibrato $\mathcal{F}$ definito su $S \times X$.

Alla nozione di “famiglia di oggetti” risulta poi naturale imporre alcune condizioni, molto ragionevoli:

- (F1) Una famiglia di oggetti parametrizzata da un punto consiste di un singolo oggetto di $\mathcal{A}$;
- (F2) Deve essere definita una nozione di “equivalenza” di famiglie parametrizzate da una varietà S che si riduca alla relazione di equivalenza $\sim$ su $\mathcal{A}$ quando $S = \{\text{pt}\}$. Questa relazione di equivalenza verrà indicata ancora con $\sim$.
- (F3) Per ogni morfismo di varietà $f : S' \rightarrow S$ e per ogni famiglia $\mathcal{F}$ di oggetti di $\mathcal{A}$ parametrizzata da S , ci deve essere una “famiglia indotta”, che indicheremo con $f^* \mathcal{F}$, parametrizzata da S' . Quest’ultima operazione deve soddisfare a delle ovvie proprietà functoriali e di compatibilità con la relazione di equivalenza $\sim$:

$$\begin{aligned} (f \circ g)^* &= g^* \circ f^*, \\ \text{id}_S^* &= \text{identità}, \\ \mathcal{F} \sim \mathcal{F}' &\Rightarrow f^* \mathcal{F} \sim f^* \mathcal{F}'. \end{aligned}$$

Gli ingredienti fondamentali di un “problema di moduli” sono dunque, una collezione di oggetti $\mathcal{A}$, una relazione di equivalenza $\sim$ su $\mathcal{A}$ ed una nozione di “famiglia di oggetti” che soddisfa le tre proprietà precedenti. Quello che si desidera fare è dotare l’insieme quoziente $\mathcal{A}/\sim$ di una struttura di varietà che rifletta, in qualche modo, la struttura delle famiglie di oggetti di $\mathcal{A}$. Più precisamente, supponiamo che M sia una varietà il cui insieme soggiacente sia $\mathcal{A}/\sim$. Allora, in corrispondenza ad una famiglia $\mathcal{F}$ di oggetti di $\mathcal{A}$ parametrizzata da S , otteniamo una mappa

$$\rho_{\mathcal{F}} : S \rightarrow M, \quad s \mapsto [\mathcal{F}_s],$$

ove $[\mathcal{F}_s]$ indica la classe di $\sim$ -equivalenza dell’oggetto $\mathcal{F}_s$. Sembra ragionevole richiedere che questa mappa sia un morfismo di varietà. Il massimo che si potrebbe sperare sarebbe poi che ρ definisse una corrispondenza biunivoca tra classi di equivalenza di famiglie parametrizzate da S e morfismi $S \rightarrow M$.

Questa idea può essere convenientemente espressa in termini di categorie e di funtori. Indichiamo con $F_{\mathcal{A}}(S)$ l’insieme delle classi di equivalenza delle famiglie di elementi di $\mathcal{A}$ parametrizzate da S . Dalla condizione (F3) segue che $F_{\mathcal{A}}$ è un funtore controvariante dalla categoria delle varietà alla categoria

degli insiemi. Inoltre, se $\text{Hom}(S, M)$ denota l'insieme dei morfismi di varietà da S in M , ci sono delle mappe naturali

$$\Psi(S) : F_{\mathcal{A}}(S) \rightarrow \text{Hom}(S, M)$$

definite ponendo $\Psi(S)(\mathcal{F}) = \rho_{\mathcal{F}}$. Queste mappe definiscono una trasformazione naturale

$$\Psi : F_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Hom}(\cdot, M).$$

Quello che stiamo richiedendo è, in sostanza, che Ψ sia un isomorfismo di funtori o, in altri termini, che il funtore $F_{\mathcal{A}}$ sia rappresentato da M (più precisamente, dalla coppia (M, Ψ)).

Diamo pertanto la seguente definizione:

Definizione B.2. Uno *spazio di moduli buono* (in inglese “fine”) per un dato problema di moduli, è una coppia (M, Ψ) che rappresenta il funtore $F_{\mathcal{A}}$.

Si noti che, se (M, Ψ) rappresenta $F_{\mathcal{A}}$, si ha una biiezione naturale

$$\Psi(\text{pt}) : \mathcal{A}/\sim = F_{\mathcal{A}}(\text{pt}) \rightarrow \text{Hom}(\text{pt}, M) = M.$$

Inoltre, per ogni varietà S ed ogni $s \in S$, l'inclusione $\{s\} \hookrightarrow S$ induce il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} F_{\mathcal{A}}(S) & \xrightarrow{\Psi(S)} & \text{Hom}(S, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_{\mathcal{A}}(\text{pt}) & \xrightarrow{\Psi(\text{pt})} & M. \end{array}$$

Si ha quindi

$$\rho_{\mathcal{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(\text{pt}) \circ \rho'_{\mathcal{F}} = \Psi(S)(\mathcal{F}),$$

ove $\rho'_{\mathcal{F}} : S \rightarrow \mathcal{A}/\sim$ è la mappa definita da $\rho'_{\mathcal{F}}(s) = [\mathcal{F}_s]$. Inoltre, l'identità id_M determina, a meno di $\sim$ -equivalenza, una famiglia $\mathcal{F}_M$ parametrizzata da M , ed è facile convincersi che, per ogni famiglia $\mathcal{F}$ parametrizzata da S , le famiglie $\mathcal{F}$ e $\rho_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{F}_M)$ corrispondono entrambe allo stesso morfismo $\rho_{\mathcal{F}} : S \rightarrow M$. Si ha quindi

$$\mathcal{F} \sim \rho_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{F}_M).$$

Si ottiene pertanto la seguente definizione alternativa:

Definizione B.3. Uno spazio di moduli buono è il dato di una varietà M ed una famiglia $\mathcal{F}_M$ parametrizzata da M tale che, per ogni famiglia $\mathcal{F}$ parametrizzata da una varietà S , esiste un unico morfismo $\rho_{\mathcal{F}} : S \rightarrow M$ tale che $\mathcal{F} \sim \rho_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{F}_M)$. $\mathcal{F}_M$ è detta una *famiglia universale* per il problema dato.

Nella maggior parte dei casi, purtroppo, non esiste uno spazio di moduli buono. È quindi necessario trovare delle condizioni più deboli che, tuttavia, determinino un'unica struttura di varietà su M . La soluzione consiste nel richiedere una proprietà universale su Ψ piuttosto che su M .

Definizione B.4. Uno *spazio di moduli grossolano* per un dato problema di moduli è una varietà M ed una trasformazione naturale di funtori

$$\Psi : F_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Hom}(\cdot, M),$$

tale che:

- (i) $\Psi(\text{pt})$ è biiettiva;
- (ii) per ogni varietà M' ed ogni trasformazione naturale

$$\Psi' : F_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Hom}(\cdot, M'),$$

esiste un'unica trasformazione naturale

$$\Omega : \text{Hom}(\cdot, M) \rightarrow \text{Hom}(\cdot, M')$$

tale che $\Psi' = \Omega \circ \Psi$.

Questa è una bella descrizione dal punto di vista categorico, ma il suo significato intuitivo non è molto chiaro. Notiamo, tuttavia, che Ψ è ancora determinato da

$$\Psi(S)(\mathcal{F}) = \Psi(\text{pt}) \circ \rho'_{\mathcal{F}}.$$

Inoltre, per ogni trasformazione naturale

$$\Psi' : F_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Hom}(\cdot, M'),$$

si ha una mappa

$$f : \Psi'(\text{pt}) \circ \Psi(\text{pt})^{-1} : M \rightarrow M'.$$

Se esiste una trasformazione naturale Ω come sopra, si deduce che $f = \Omega(\text{pt})$ coincide con il morfismo $\Omega(M)(\text{id}_M)$. Infatti, in tutta generalità, si ha

$$\Omega(S)(g) = f \circ g,$$

per ogni $g \in \text{Hom}(S, M)$.

Viceversa, se f è un morfismo di varietà, si può usare quest'ultima formula per definire Ω . Si ottiene così, ancora una volta, una definizione alternativa:

Definizione B.5. Uno spazio di moduli grossolano è il dato di una varietà M ed una biiezione

$$\alpha : \mathcal{A} / \sim \rightarrow M$$

tale che:

- (i) per ogni famiglia $\mathcal{F}$ parametrizzata da una varietà S , $\rho_{\mathcal{F}} = \alpha \circ \rho'_{\mathcal{F}}$ è un morfismo;
- (ii) per ogni varietà M' ed ogni trasformazione naturale

$$\Psi' : F_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Hom}(\cdot, M'),$$

la mappa

$$f = \Psi'(\text{pt}) \circ \alpha^{-1} : M \rightarrow M'$$

è un morfismo di varietà.

Per quanto riguarda l'unicità, si ha:

Proposizione B.6. *Siano (M_1, α_1) e (M_2, α_2) due spazi di moduli grossolani per lo stesso problema di moduli. Esiste allora un isomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$ tale che $f \circ \alpha_1 = \alpha_2$.*

Dimostrazione. La mappa $f = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} : M_1 \rightarrow M_2$ è biiettiva, con inversa $\alpha_1 \circ \alpha_2^{-1}$. Dalla definizione precedente, precisamente, dal punto (ii), discende che f e f^{-1} sono dei morfismi di varietà. $\square$

Dalla Definizione B.5 e dalla formula

$$\Psi(S)(\mathcal{F}) = \Psi(\text{pt}) \circ \rho'_{\mathcal{F}},$$

deriva che il concetto di spazio di moduli grossolano è indipendente dalla particolare relazione di equivalenza definita sulle famiglie (purché, ovviamente, questa soddisfi le condizioni richieste in (F1), (F2) e (F3)). Per gli spazi di moduli buoni la situazione è molto diversa. Infatti si ha il seguente risultato:

Proposizione B.7. *Uno spazio di moduli grossolano (M, Ψ) è uno spazio di moduli buono se e solo se:*

- (i) *esiste una famiglia $\mathcal{F}_M$ parametrizzata da M tale che, per ogni $m \in M$, $(\mathcal{F}_M)_m$ appartenga alla classe di equivalenza $\Psi(\text{pt})^{-1}(m)$;*

(ii) per ogni coppia di famiglie $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ parametrizzate da una varietà S ,

$$\rho_{\mathcal{F}} = \rho_{\mathcal{F}'} \Leftrightarrow \mathcal{F} \sim \mathcal{F}'.$$

Dimostrazione. Discende subito dalle definizioni date. Infatti, si ha:

- (i) $\Leftrightarrow \Psi$ è suriettiva,
- (ii) $\Leftrightarrow \Psi$ è iniettiva.

□

Osservazione B.8. La Definizione B.2, essendo interamente categorica, si può estendere anche ad altre categorie (schemi, spazi algebrici, etc.). Anche la Definizione B.4 può essere estesa, ma bisogna prestare particolare attenzione alla forma di (i). Tale condizione, infatti, è già troppo forte per varietà definite su un corpo non algebricamente chiuso.

Appendice C

Geometria invariante

In questa sezione daremo solo una breve descrizione dei principali risultati della teoria G.I.T. di Mumford, rimandando a [15] e, soprattutto, a [12] per una trattazione approfondita.

Iniziamo con alcune definizioni:

Definizione C.1. Un *gruppo algebrico* è una varietà algebrica G dotata di una struttura di gruppo tale che le applicazioni

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

siano morfismi di varietà algebriche.

Un *omomorfismo* di gruppi algebrici è un'applicazione che è, allo stesso tempo, un morfismo di varietà e un omomorfismo di gruppi.

Definizione C.2. Una *operazione* (o *azione*) di un gruppo algebrico G su una varietà algebrica X è un morfismo di varietà

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

tale che,

$$e \cdot x = x,$$

e

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x,$$

per ogni $g_1, g_2 \in G$ e ogni $x \in X$, ove e indica l'elemento neutro di G .

Sia data una varietà algebrica X e un'azione di un gruppo algebrico G su di essa. Dato un punto $x \in X$, lo *stabilizzatore* G_x di x è il sottogruppo chiuso di G definito da

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

L'*orbita* $\text{Orb}(x)$ di x è il sottoinsieme di X definito da

$$\text{Orb}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\},$$

ovvero l'immagine del morfismo

$$\begin{aligned} G &\rightarrow X \\ g &\mapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

L'azione di G è *chiusa* se tutte le orbite sono dei sottoinsiemi chiusi di X . Un punto $x \in X$ (risp. un sottoinsieme $A \subset X$) è detto *invariante* per l'azione di G se $g \cdot x = x$ (risp. $g \cdot A \subset A$), per ogni $g \in G$.

Siano X e Y due varietà su cui agisce il gruppo G . Un morfismo di varietà

$$f : X \rightarrow Y$$

è detto *equivariante* se

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x),$$

per ogni $g \in G$ e $x \in X$. Se l'azione di G su Y è *triviale*, cioè $g \cdot y = y$, per ogni $g \in G$ e $y \in Y$, si ottiene la nozione di un morfismo *G -invariante*, cioè un morfismo che è costante sulle orbite.

L'esempio più classico di un gruppo algebrico è $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, che agisce nel modo ovvio su $\mathbb{C}^n$. Di conseguenza, data una *rappresentazione razionale* di un gruppo algebrico G , cioè un omomorfismo di gruppi algebrici

$$G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C}),$$

si ottiene un'azione di G su $\mathbb{C}^n$. Una tale azione è detta *lineare*.

In generale, un gruppo algebrico isomorfo ad un sottogruppo chiuso di $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ è detto un *gruppo algebrico lineare*. Dato che $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ è una varietà affine, lo stesso vale per ogni gruppo algebrico lineare (si dimostra inoltre che ogni gruppo algebrico affine è lineare).

Se G agisce su una varietà X , per ogni $g \in G$ e $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ si definisce f^g mediante

$$f^g(x) = f(g \cdot x).$$

Si ha, evidentemente,

$$f^{g_1 g_2} = (f^{g_1})^{g_2}, \quad f^e = f,$$

e, inoltre, la mappa

$$f \mapsto f^g$$

è un automorfismo di $\mathbb{C}$ -algebre di $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Passiamo ora ad analizzare il concetto di “quoziente” di una varietà algebrica per l’azione di un gruppo. D’ora in poi ci limiteremo a considerare gruppi algebrici lineari, cioè sottogruppi chiusi di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Sia X una varietà algebrica su cui agisce un gruppo algebrico (lineare) G .

Definizione C.3. Un *quoziente categorico* di X per l’azione di G è una coppia (Y, ϕ) costituita da una varietà algebrica Y e da un morfismo G -invariante

$$\phi : X \rightarrow Y,$$

che soddisfa alla seguente proprietà universale: per ogni morfismo G -invariante $\phi' : X \rightarrow Y'$, esiste un unico morfismo $\gamma : Y \rightarrow Y'$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ & \searrow \phi' & \downarrow \gamma \\ & & Y'. \end{array}$$

Dalla definizione deriva immediatamente che un quoziente categorico, se esiste, è unico a meno di isomorfismo.

Esempio C.4. Sia $M(n, \mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n , su cui il gruppo lineare $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ agisce per coniugazione:

$$(g, a) \mapsto gag^{-1},$$

per ogni $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e $a \in M(n, \mathbb{C})$.

I coefficienti $\sigma_i(a)$ del polinomio caratteristico della matrice a ,

$$\lambda^n - \sigma_1(a)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n(a),$$

sono delle funzioni polinomiali, invarianti per coniugazione. Si ottiene dunque un morfismo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ -invariante

$$\phi : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^n,$$

inviando una matrice a nella n -upla $(\sigma_1(a), \dots, \sigma_n(a))$.

La coppia $(\mathbb{C}^n, \phi)$ è il quoziente categorico di $M(n, \mathbb{C})$ per l'azione di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Si può infatti costruire una sezione di ϕ ,

$$s : \mathbb{C}^n \rightarrow M(n, \mathbb{C}),$$

ponendo

$$s(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ x_n & x_{n-1} & \cdots & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Se $\phi' : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow Y'$ è un morfismo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ -invariante, si definisce $\gamma : \mathbb{C}^n \rightarrow Y'$ ponendo $\gamma = \phi' \circ s$. È immediato verificare che γ soddisfa alle proprietà richieste.

Analizziamo, in particolare, il caso $n = 2$. Il morfismo

$$\phi : M(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^2$$

è dato da

$$a \mapsto (\mathrm{tr}(a), \det(a)).$$

Una matrice $a \in M(2, \mathbb{C})$ ha due autovalori distinti se $\mathrm{tr}(a)^2 - 4\det(a) \neq 0$. Sia C la curva in $\mathbb{C}^2$ definita dall'equazione $x^2 - 4y = 0$, e sia $P = (x, y)$ un punto di $\mathbb{C}^2$. La descrizione della fibra di ϕ sopra il punto P dipende dalla posizione di P rispetto alla curva C :

- (i) Se $P \notin C$, la fibra $\phi^{-1}(P)$ è la classe di coniugazione della matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

dove λ e μ sono le soluzioni dell'equazione $t^2 - xt + y = 0$.

- (ii) Se $P \in C$, e se λ è la radice doppia dell'equazione precedente, la fibra $\phi^{-1}(P)$ è l'unione delle classi di coniugazione delle matrici

$$a_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dato che, per $t \neq 0$, le matrici $a_t = \begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ e a_1 sono coniugate, si scopre che la chiusura dell'orbita di a_1 contiene la matrice a_0 . In particolare quest'orbita non è chiusa, mentre lo è l'orbita di a_0 .

In conclusione, esiste un aperto, $\mathbb{C}^2 \setminus C$, del quoziente categorico $\mathbb{C}^2$ di $M(2, \mathbb{C})$, i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con le orbite dell'azione di $GL(2, \mathbb{C})$.

Un quoziente categorico non ha, in generale, delle buone proprietà geometriche. Per ovviare a questo inconveniente diamo le seguenti definizioni:

Definizione C.5. Un *buon quoziente* di X per l'azione di un gruppo G è una coppia (Y, ϕ) , costituita da una varietà algebrica Y e da un morfismo G -invariante $\phi : X \rightarrow Y$, che soddisfa alle condizioni seguenti:

- (i) Il morfismo ϕ è affine e suriettivo;
- (ii) L'immagine di un sottoinsieme chiuso G -invariante di X è un chiuso di Y . Due sottoinsiemi chiusi G -invarianti disgiunti di X hanno delle immagini disgiunte in Y ;
- (iii) Il fascio strutturale $\mathcal{O}_Y$ di Y è il sottofascio delle sezioni G -invarianti del fascio strutturale di X .

Una sezione $f \in \Gamma(U, \phi_* \mathcal{O}_X)$ è G -invariante se è invariante in quanto morfismo $\phi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{C}$. La condizione (iii) significa che $\mathcal{O}_Y = (\phi_* \mathcal{O}_X)^G$.

I buoni quozienti hanno le seguenti proprietà:

Proposizione C.6. Sia (Y, ϕ) un buon quoziente di X per l'azione di G . Allora:

- (i) (Y, ϕ) è un quoziente categorico;
- (ii) La varietà Y è munita della topologia quoziente;
- (iii) La varietà Y parametrizza le orbite chiuse in X .

Definizione C.7. Un buon quoziente (Y, ϕ) di X per l'azione di G è un *quoziente geometrico* se tutte le orbite in X sono chiuse.

Ciò significa che, se (Y, ϕ) è un quoziente geometrico, allora l'insieme soggiacente a Y è in biiezione con l'insieme delle orbite in X .

Dei buoni risultati sull'esistenza dei quozienti si possono dimostrare, in generale, solo per una certa classe di gruppi:

Definizione C.8. Un gruppo algebrico lineare G è detto *geometricamente riduttivo* se, per ogni azione lineare di G su $\mathbb{C}^n$ ed ogni punto invariante $x \neq 0$ di $\mathbb{C}^n$, esiste un polinomio omogeneo invariante f , di grado ≥ 1 , tale che $f(x) \neq 0$.

Questa definizione fornisce precisamente i risultati geometrici desiderati. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema C.9. *Sia G un gruppo algebrico geometricamente riduttivo che agisce su una varietà affine X . Allora esiste una varietà affine Y ed un morfismo $\phi : X \rightarrow Y$, tale che la coppia (Y, ϕ) sia un buon quoziente di X .*

(La dimostrazione si basa sul fatto che, se $X = \text{Spec}(A)$, allora A^G è una $\mathbb{C}$ -algebra di tipo finito. Si pone quindi $Y = \text{Spec}(A^G)$; l'inclusione $A^G \hookrightarrow A$ fornisce il morfismo $\phi : X \rightarrow Y$.)

Osservazione C.10. Da questo risultato discende un semplice criterio per stabilire quando due punti di X hanno la stessa immagine in Y . Si ha infatti:

$$\phi(x_1) = \phi(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\text{Orb}(x_1)} \cap \overline{\text{Orb}(x_2)} \neq \emptyset.$$

Da ciò segue che, se l'azione di G su X è chiusa, allora Y è un quoziente geometrico.

Passiamo ora a considerare il caso delle varietà proiettive. Qui le cose si complicano. Infatti, se X è una varietà proiettiva in $\mathbb{P}^n$, si potrebbe pensare di costruire un quoziente di X per l'azione di un gruppo G ricoprendo X con degli aperti affini G -invarianti ed incollando poi opportunamente i quozienti di questi aperti affini.

Purtroppo, in generale, non è possibile ricoprire X in questo modo. Tuttavia si può ottenere un quoziente di un aperto di X , precisamente dell'unione di tutti i sottoinsiemi aperti affini G -invarianti di X . Per ottenere un quoziente con delle buone proprietà globali è però necessario restringere l'attenzione a dei particolari sottoinsiemi aperti affini di X , quelli del tipo X_f , ove f è un polinomio omogeneo in $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Bisogna quindi cercare insiemi di questo tipo che siano invarianti per l'azione di G e, di conseguenza, polinomi f che siano G -invarianti. Qui ci si trova di fronte ad un problema: infatti l'azione di G su X non determina un'azione di G sull'anello dei polinomi $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, né su alcun suo quoziente. Diamo quindi la seguente definizione:

Definizione C.11. Una *linearizzazione*¹ dell'azione di un gruppo algebrico G su una varietà proiettiva X in $\mathbb{P}^n$ è un'azione lineare di G su $\mathbb{C}^{n+1}$ che induce l'azione data su X . Un'azione *lineare* di G su X è il dato di un'azione di G su X e di una sua linearizzazione.

Un'azione lineare di G su X determina naturalmente un'azione di G sull'anello dei polinomi $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Diamo quindi la seguente definizione:

Definizione C.12. Sia X una varietà proiettiva in $\mathbb{P}^n$. Data un'azione lineare di un gruppo geometricamente riduttivo G su X , un punto $x \in X$ è detto *semistabile* se esiste un polinomio omogeneo G -invariante f , di grado ≥ 1 , tale che $f(x) \neq 0$. Il punto x è detto *stabile*² se $\dim \text{Orb}(x) = \dim G$ e se esiste un polinomio omogeneo G -invariante f , di grado ≥ 1 , tale che $f(x) \neq 0$ e l'azione di G su X_f è chiusa.

Indichiamo allora con X^{ss} e X^s rispettivamente gli insiemi dei punti semistabili e stabili di X . Naturalmente gli insiemi X^{ss} e X^s non dipendono solo dall'azione di G su X , ma anche dall'immersione di X in $\mathbb{P}^n$ e dalla scelta della linearizzazione dell'azione di G . Si può dimostrare che X^{ss} e X^s sono due sottoinsiemi aperti e G -invarianti di X .

Il risultato principale è espresso dal seguente teorema:

Teorema C.13. *Sia X una varietà proiettiva in $\mathbb{P}^n$ e sia data un'azione lineare di un gruppo geometricamente riduttivo G su X . Allora:*

- (i) *Esiste un buon quoziente (Y, ϕ) di X^{ss} per l'azione di G . Y è una varietà proiettiva;*
- (ii) *Esiste un aperto Y^s di Y tale che $\phi^{-1}(Y^s) = X^s$ e (Y^s, ϕ) è un quoziente geometrico di X^s ;*
- (iii) *Per ogni $x_1, x_2 \in X^{ss}$, si ha:*

$$\phi(x_1) = \phi(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\text{Orb}(x_1)} \cap \overline{\text{Orb}(x_2)} \cap X^{ss} \neq \emptyset;$$

- (iv) *Un punto semistabile x è stabile se e solo se $\dim \text{Orb}(x) = \dim G$ e $\text{Orb}(x)$ è chiusa in X^{ss} .*

Osservazione C.14. Si noti che il fatto che Y sia una varietà proiettiva ci permette di considerare Y come una compattificazione (naturale) del quoziente geometrico di X^s per l'azione di G .

¹La nozione di linearizzazione dell'azione di un gruppo si può generalizzare al concetto di linearizzazione dell'azione di G rispetto alla scelta di un fibrato in rette sulla varietà X (vedi [15], oppure [12]).

²Mumford dice "propriamente stabile".

Appendice D

Schemi “Quot”

In questa sezione richiamiamo brevemente i principali risultati dimostrati da Grothendieck in [6].

Sia X uno schema su S e sia $\mathcal{F}$ un fascio di moduli quasi-coerente su X . Indichiamo con $\text{Quot}(\mathcal{F}/X/S)$ l'insieme dei fasci di moduli quasi-coerenti quozienti di $\mathcal{F}$ che sono piatti su S . In corrispondenza ad un morfismo di cambiamento di base $S' \rightarrow S$, poniamo $X' = X \times_S S'$ e $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$. In questo modo si ottiene uno schema X' su S' munito di un fascio di moduli quasi-coerente $\mathcal{F}'$ e possiamo così considerare l'insieme $\text{Quot}(\mathcal{F}'/X'/S')$. Si pone allora

$$\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}(S') = \text{Quot}(\mathcal{F}'/X'/S').$$

Se $S'' \rightarrow S'$ è un S -morfismo, lo schema $X'' = X \times_S S''$ è isomorfo a $X' \times_{S'} S''$ e il fascio $\mathcal{F}''$ è isomorfo a $\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} \mathcal{O}_{S''}$. Inoltre, il funtore immagine inversa

$$\mathcal{G}' \mapsto \mathcal{G}' \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} \mathcal{O}_{S''},$$

dalla categoria dei fasci di moduli quasi-coerenti su X' a quella dei fasci di moduli quasi-coerenti su X'' è esatto a destra e trasforma fasci di moduli S' -piatti in fasci di moduli S'' -piatti. Si ha così una mappa naturale

$$\text{Quot}(\mathcal{F}'/X'/S') \rightarrow \text{Quot}(\mathcal{F}''/X''/S'').$$

Questo dimostra che $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$ è un funtore controvariante dalla categoria degli schemi su S alla categoria degli insiemi.

Se supponiamo che S sia uno schema noetheriano, che X sia proiettivo su S , che $\mathcal{F}$ sia un fascio di $\mathcal{O}_X$ -moduli coerente, e se ci limitiamo a considerare degli schemi S' che siano localmente noetheriani, si ha il seguente risultato:

Teorema D.1. [6, Teorema 3.1]. *Il funtore controvariante $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$, sulla categoria degli S -schemi localmente noetheriani, è rappresentabile da un S -schema $Quot_{\mathcal{F}/X/S}$, somma di una serie di S -schemi proiettivi.*

La decomposizione dello schema $Quot_{\mathcal{F}/X/S}$ si ottiene nel modo seguente: sia $\mathcal{O}_X(1)$ un fascio invertibile su X molto ampio relativamente ad S . Ad ogni fascio coerente $\mathcal{F}$ su X si può associare la funzione

$$P_{\mathcal{F}}(n) = \chi(\mathcal{F}(n)) = \chi(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)).$$

Si dimostra che $P_{\mathcal{F}}(n)$ è un polinomio in n a coefficienti razionali, detto il *polinomio di Hilbert* di $\mathcal{F}$.

Per ogni polinomio $P(n)$ a coefficienti razionali, sia $\mathbf{Quot}^P(\mathcal{F}/X/S)$ il sottoinsieme di $\mathbf{Quot}(\mathcal{F}/X/S)$ costituito dai quozienti coerenti $\mathcal{G}$ di $\mathcal{F}$, piatti su S , e il cui polinomio di Hilbert è uguale a P . Se poniamo

$$\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}^P(S') = \mathbf{Quot}^P(\mathcal{F}'/X'/S'),$$

si ottiene un sottofuntore di $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$. Si dimostra allora che $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$ è rappresentabile se e solo se lo sono i funtori $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}^P$. Inoltre lo schema $Quot_{\mathcal{F}/X/S}$ che rappresenta il funtore $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$ è isomorfo alla somma degli schemi $Quot_{\mathcal{F}/X/S}^P$ che rappresentano i funtori $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}^P$. Il teorema precedente è allora una conseguenza del risultato seguente:

Teorema D.2. [6, Teorema 3.2]. *Usando le notazioni precedenti, il funtore $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}^P$ è rappresentabile da un S -schema proiettivo $Quot_{\mathcal{F}/X/S}^P$.*

Si può inoltre dimostrare che i due teoremi precedenti continuano a valere se si suppone solo X quasi-proiettivo su S , a patto che, nei risultati, si sostituisca la parola “proiettivo” con “quasi-proiettivo” e che si indichi con $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}^P(S')$ l’insieme dei quozienti coerenti di $\mathcal{F}'$, piatti su S' , il cui supporto è proprio su S' .

Per terminare ricordiamo il seguente risultato, concernente lo studio infinitesimale degli schemi “Quot”.

Supponiamo che lo schema $Q = Quot_{\mathcal{F}/X/S}$ esista. Sia $s \in S$ e sia $x \in Q$ un punto al di sopra di s ; x è definito da un fascio di moduli coerente $\mathcal{G}_s$, quoziente di $\mathcal{F}_s$,

$$\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_s / \mathcal{H}_s,$$

sulla fibra X_s al di sopra di s . Sotto tali ipotesi, si ha:

Teorema D.3. *Lo spazio tangente $T_x Q_s$ alla fibra Q_s nel punto x è canonicamente isomorfo a $H^0(X_s, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_s}}(\mathcal{H}_s, \mathcal{G}_s))$.*

Bibliografia

- [1] M.F. Atiyah, *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Soc. **7** (1957), 414–452.
- [2] U.V. Desale, S. Ramanan, *Classification of vector bundles of rank 2 on hyperelliptic curves*, Invent. Math. **38** (1976), 161–185.
- [3] P. Griffiths, J. Harris, “Principles of Algebraic Geometry”, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [4] A. Grothendieck, *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J. Math. **79** (1957), 121–138.
- [5] A. Grothendieck, *Technique de descente et théorèmes d’existence en géométrie algébrique I. Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats*, Sémin. Bourbaki **190** (1959-60).
- [6] A. Grothendieck, *Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique IV: les schémas de Hilbert*, Sémin. Bourbaki **221** (1960-61), 1–28.
- [7] R. Hartshorne, “Algebraic Geometry”, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
- [8] F. Hirzebruch, “Topological Methods in Algebraic Geometry”, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1978.
- [9] S. Kobayashi, “Differential Geometry of Complex Vector Bundles”, Iwanami Shoten Publishers and Princeton University Press, 1987.
- [10] J. Le Potier, “Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques”, Appunti di un corso di D.E.A., 1991.

- [11] D. Mumford, “Tata Lectures on Theta II”, Birkhäuser – Progress in Mathematics 28, Boston, Basel, Stuttgart, 1984.
- [12] D. Mumford, J. Fogarty, “Geometric Invariant Theory”, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1982.
- [13] M.S. Narasimhan, *Survey of vector bundles on Curves*, Lect. Notes in Math. 1273 (1987), 1–8.
- [14] M.S. Narasimhan, S. Ramanan, *Vector bundles on curves*, in: Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), Oxford Univ. Press (1969), 335–346.
- [15] P.E. Newstead, “Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces”, Tata Inst. of Fundamental Research and Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1978.
- [16] P.E. Newstead, *Rationality of moduli spaces of stable bundles*, Math. Ann. **215** (1975), 251–268.
- [17] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, “Vector bundles on complex projective spaces”, Birkhäuser – Progress in Mathematics 3, Boston, Basel, Stuttgart, 1980.
- [18] S. Ramanan, *The moduli spaces of vector bundles over an algebraic curve*, Math. Ann. **200** (1973), 69–84.
- [19] J.J. Rotman, “An Introduction to Algebraic Topology”, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1988.
- [20] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. **61** (1955), 197–278.
- [21] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier **6** (1956), 1–42.
- [22] C.S. Seshadri, *Moduli of π -vector bundles over an algebraic curve*, in “Questions on Algebraic Varieties”, CIME, III ciclo, Varenna (1970), 139–260.
- [23] C.S. Seshadri, *Fibrés Vectoriels sur les Courbes Algébriques*, Astérisque **96** (1982).

- [24] L.W. Tu, *Semistable bundles over an Elliptic Curve*, Adv. in Math. **98** (1993), 1–26.
- [25] J.-L. Verdier, J. Le Potier, “Module des fibrés stables sur les courbes algébriques”, Progress in Math. 54, 1985.

Indice analitico

- anello dei numeri duali, 55
- artiniana (categoria), 38
- azione, 15, 49, 69
 - chiusa, 70
 - lineare, 70, 75
 - triviale, 49, 70
- categoria, 37
 - abeliana, 38
 - artiniana, 38
- cobordo, 11, 56
- cociclo, 10, 56
- contrattile, 15
- curva
 - ellittica, 57
 - iperellittica, 58
- deformazione infinitesima, 55
- divisore, 25
 - principale, 25
- divisori linearmente equivalenti, 25
- equazioni locali, 25
- estensione, 59
- famiglia, 32, 42
 - di fibrati vettoriali, 63
 - di oggetti, 63
 - universale, 66
- famiglie equivalenti, 42
- fascio
 - delle funzioni meromorfe, 25
 - delle funzioni olomorfe, 25
 - delle funzioni regolari, 9
 - “fine”, 12, 21
 - localmente libero, 9
 - piatto, 32
- fibra, 1
- fibrato
 - determinante, 5
 - di Poincaré, 43, 52
 - duale, 5
 - indecomponibile, 45, 57
 - in rette, 2
 - quoziente, 6
 - semistabile, 34
 - semplice, 37
 - stabile, 34
 - triviale, 2, 4
 - vettoriale, 1
- filtrazione
 - di Harder–Narasimhan, 36
 - di Jordan–Hölder, 38, 39
- fiore, 20, 21
- funzioni
 - di transizione, 2
 - omotope, 13, 14
- grado
 - di un divisore, 26
 - di un fibrato, 23
 - di una sezione, 23
 - locale, 23
- graduato, 39
- gruppo
 - algebrico, 69
 - lineare, 70
 - di omotopia, 14
 - di Picard, 11
 - fondamentale, 14
 - geometricamente riduttivo, 74
 - topologico, 15
- Hilbert (polinomio di), 47, 77

- insieme
 - delle classi di omotopia, 13
 - di coomologia, 11
 - limitato, 32
 - invariante, 70
 - isomorfismo
 - di deformazioni infinitesime, 55
 - di fibrati vettoriali, 4
 - linearizzazione, 75
 - lunghezza (di una filtrazione), 39
 - Mayer–Vietoris, 20
 - morfismo, 1
 - equivariante, 70
 - invariante, 70
 - omomorfismo
 - di estensioni, 59
 - di fibrati vettoriali, 3
 - di gruppi algebrici, 69
 - omotopi (spazi topologici), 13
 - omotopia, 13
 - relativa, 14
 - operazione, 69
 - orbita, 15, 70
 - paracompatto, 1, 12
 - pendenza, 34
 - periodi, 27
 - polinomio di Hilbert, 47, 77
 - potenza
 - esterna, 5
 - simmetrica, 5
 - prodotto tensoriale, 5
 - pull-back, 8
 - quoziente, 71
 - buono, 51, 73
 - categorico, 71
 - geometrico, 51, 73
 - rango, 1
 - rappresentazione razionale, 70
 - rialzamento, 8
 - S-equivalenza, 39, 52, 57
 - salto (fenomeno del), 44, 45
 - schema, 32
 - Quot, 48
 - semistabile (punto), 51, 75
 - sezione, 9
 - somma diretta, 4
 - sottofibrato, 6
 - semistabile massimale, 35
 - spazio di moduli
 - buono, 43, 52, 65
 - grossolano, 43, 52, 66
 - stabile (punto), 51, 75
 - stabilizzatore, 70
 - teorema
 - A e B di Serre, 29
 - di Abel, 28
 - di Harder–Narasimhan, 36
 - di inversione di Jacobi, 28
 - di Seifert–van Kampen, 20
 - trivializzazione, 1
 - varietà, 1
 - jacobiana, 27
- Francesco Bottacin
 Università degli Studi di Bergamo
 Facoltà di Ingegneria
 Viale Marconi, 5
 24044 Dalmine (BG)
 Italy
 e-mail: francesco.bottacin@unibg.it
 web: <http://ingegneria.unibg.it/bottacin/>