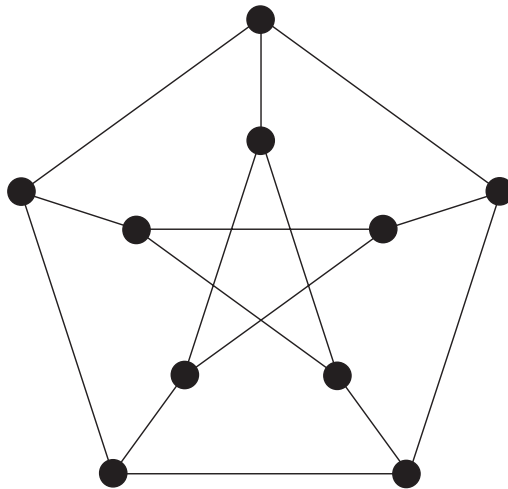


Francesco Bottacin

Note del Corso di

TEORIA DEI GRAFI



A.A. 2005/06

Ultima revisione: dicembre 2008

CAPITOLO 1

Grafi: nozioni basilari

1. Introduzione

La nascita della teoria dei grafi può essere fatta coincidere con la pubblicazione, nel 1736, dell'articolo di Eulero intitolato *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis* (La Soluzione di un Problema Relativo alla Geometria di Posizione), in cui viene risolto il famoso Problema dei Ponti di Königsberg.

Citando Eulero:

“... Il problema, che mi è stato riferito essere molto noto, è il seguente: a Königsberg, in Prussia, c'è un'isola *A*, chiamata Kneiphof; il fiume che la circonda è diviso in due rami, come mostrato nella figura 1, e questi rami sono attraversati da sette ponti *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* e *g*. Riguardo a questi ponti, è stato chiesto se qualcuno è in grado di trovare un percorso in modo tale da attraversare ogni ponte una e una sola volta. Mi è stato detto che qualcuno afferma che ciò sia impossibile, mentre altri rimangono nel dubbio; ma nessuno affermerebbe che ciò possa essere fatto. Partendo da ciò ho formulato il seguente problema generale: qualunque sia la disposizione e la divisione del fiume in vari rami, e qualunque numero di ponti ci possa essere, è possibile determinare se sia possibile o meno attraversare ogni ponte esattamente una sola volta? ...”

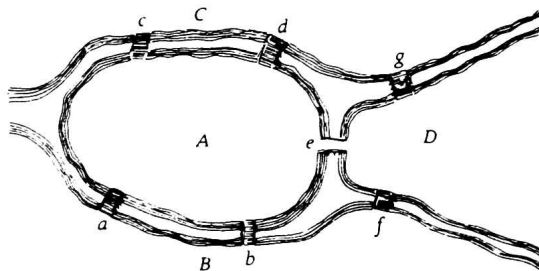


FIGURA 1. I ponti di Königsberg nella rappresentazione data da Eulero

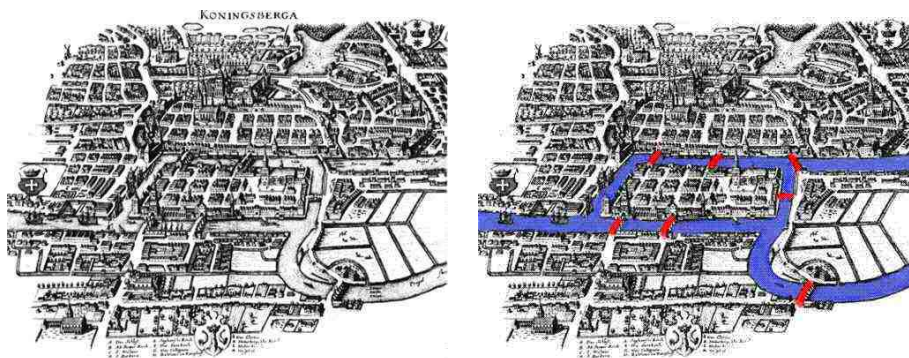
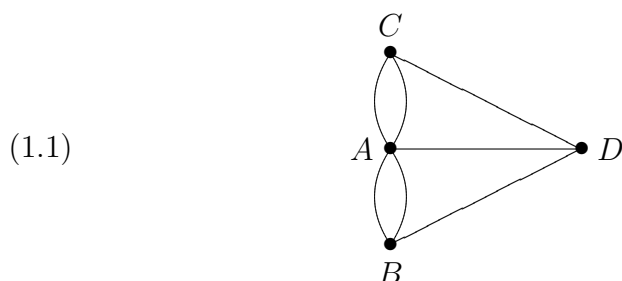


FIGURA 2. I sette ponti di Königsberg

Nella figura 2 si può vedere la disposizione reale dei sette ponti di Königsberg, in una stampa dell'epoca.

In questo problema non ha alcuna importanza l'esatta posizione delle quattro regioni A , B , C e D ; l'unica cosa che conta sono i *collegamenti* tra queste regioni, rappresentati dai sette ponti a , b , c , d , e , f e g . Eliminando quindi tutte le informazioni inutili, si arriva alla seguente rappresentazione simbolica, dove i vertici rappresentano le quattro regioni e gli archi rappresentano i collegamenti tra le varie regioni costituiti dai sette ponti:



A questa rappresentazione simbolica Eulero attribuisce il nome di *grafo*. Il problema generale formulato da Eulero può quindi essere riformulato come segue: dato un grafo qualsiasi (insieme finito di vertici collegati da vari lati) stabilire se sia possibile determinare un percorso che, partendo da uno dei vertici, attraversi tutti i lati una e una sola volta.

Una volta formulato in questi termini (cioè una volta eliminate tutte le inutili informazioni accessorie) il problema ammette una soluzione sorprendentemente semplice.

Immaginiamo, infatti, che esista un percorso che, partendo da un vertice di un determinato grafo, ne attraversi tutti i lati una e una sola volta. Consideriamo un vertice che non sia quello da cui si parte, né quello in cui si arriva. Allora ogni volta che si arriva, attraverso un lato qualsiasi, in questo vertice si deve poi uscirne attraverso un lato diverso. Quindi i lati incidenti a questo vertice possono essere suddivisi

in coppie: lato entrante-lato uscente. La conseguenza è che il numero di lati incidenti a un qualsiasi vertice diverso da quello iniziale o finale deve essere pari. Per quanto riguarda i vertici iniziale e finale, la questione è altrettanto semplice: nel vertice iniziale c'è un lato uscente che non è accoppiato con nessun lato entrante, mentre nel vertice finale c'è un lato entrante che non è accoppiato con nessun lato uscente. Quindi, se i vertici iniziale e finale sono distinti, il numero di lati incidenti a tali vertici deve essere dispari. Se invece il vertice iniziale coincide con il vertice finale, allora il lato uscente dal vertice iniziale può venire accoppiato al lato entrante nel vertice finale e quindi, ancora una volta, si scopre che il numero di lati incidenti a tale vertice deve essere pari.

Per comodità, chiameremo vertice pari (risp. vertice dispari) un vertice in cui concorrono un numero pari (risp. dispari) di lati. Abbiamo quindi ottenuto la seguente condizione *necessaria* affinché il nostro problema ammetta soluzione: dato un grafo (connesso), affinché esista un percorso che, partendo da uno dei vertici, ne attraversi tutti i lati una e una sola volta, è necessario che il numero di vertici dispari sia 0 oppure 2 (in questo caso il cammino dovrà partire da uno dei due vertici dispari e arrivare nell'altro).

Questa condizione è, in realtà, anche sufficiente (come dimostrato da Eulero), ma la dimostrazione della sufficienza è più complessa e verrà affrontata nel seguito (Teorema 5.2 del Capitolo 2).

Nel caso del grafo corrispondente al problema dei ponti di Königsberg, la condizione appena descritta fornisce immediatamente la risposta cercata: dato che nel grafo (1.1) ci sono quattro vertici dispari, non esiste alcun percorso che ne attraversi tutti i lati una e una sola volta.

2. Definizioni

Passiamo ora a definire con precisione cosa intenderemo nel seguito con il termine “grafo.”

DEFINIZIONE 2.1. Un *grafo* G è una coppia $G = (V, E)$, dove V è un insieme finito (non vuoto), detto insieme dei vertici, e E è un sottoinsieme di $[V]^2$, detto insieme dei lati.¹ Dato un grafo G , gli insiemi dei vertici e dei lati di G sono anche indicati con $V(G)$ e $E(G)$ (la lettera E è l'iniziale di “edge”).

OSSERVAZIONE 2.2. In base alla definizione data, i vertici di un grafo sono elementi di un insieme finito (non vuoto) *qualsiasi*. I lati non sono altro che coppie non ordinate di vertici, cioè un lato è identificato con i vertici che ne costituiscono le estremità. La conseguenza è che,

¹Dato un insieme V , indicheremo con $[V]^2$ l'insieme dei sottoinsiemi di V di cardinalità 2:

$$[V]^2 = \{S \in \mathcal{P}(V) : |S| = 2\}.$$

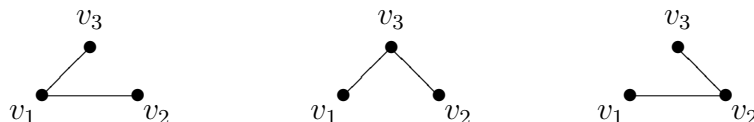
dati due vertici, ci può essere al più un solo lato che li congiunge, quindi, in base a questa definizione, il “grafo” (1.1) dei ponti di Königsberg non è un grafo! Vedremo in seguito come si possa ovviare a questo piccolo inconveniente.

OSSERVAZIONE 2.3. Un'altra definizione di grafo, equivalente alla precedente, è la seguente: un grafo G è una coppia (V, E) di insiemi con il dato di una applicazione iniettiva $\phi : E \rightarrow [V]^2$. La funzione ϕ associa a ogni lato $e \in E$ l'insieme dei due vertici che ne costituiscono le estremità. La richiesta che ϕ sia iniettiva permette di identificare E con un sottoinsieme di $[V]^2$ (la sua immagine tramite ϕ); ciò stabilisce l'equivalenza di questa definizione con la precedente.

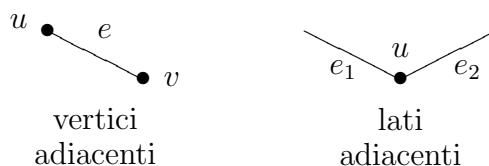
OSSERVAZIONE 2.4. Facciamo, a questo punto, un piccolo commento sulle notazioni che useremo nel seguito. Per indicare i vertici di un grafo, qualora questo fosse necessario, useremo lettere minuscole quali u, v, w , oppure x, y, z , oppure ancora lettere maiuscole come A, B, C , oppure anche solo numeri naturali come 1, 2, 3, etc. I lati, invece, saranno indicati usando la lettera e , oppure l (eventualmente con degli indici, come e_i).

ESEMPIO 2.5. A titolo di esempio determineremo quanti sono i grafi con n vertici. Sia dunque $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ l'insieme dei vertici di un grafo G e sia $[V]^2$ l'insieme dei sottoinsiemi di V di cardinalità 2. La cardinalità di $[V]^2$ è $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Dato che l'insieme E dei lati di G è un sottoinsieme di $[V]^2$, il numero dei grafi con n vertici è la cardinalità dell'insieme delle parti di $[V]^2$, cioè $2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Naturalmente, in questo modo si contano come diversi dei grafi che presentano tuttavia lo stesso “schema di collegamenti,” cioè dei grafi che sono effettivamente diversi ma che possono essere identificati (nel seguito diremo che sono isomorfi, vedi Sezione 4). Un esempio, nel caso $n = 3$, è dato dai tre grafi seguenti:



DEFINIZIONE 2.6. Sia $G = (V, E)$ un grafo. Se $u, v \in V$ e $e = \{u, v\} \in E$, si dice che il lato e *congiunge* i vertici u e v . In tal caso si dice anche che il vertice u (oppure v) e il lato e sono *incidenti*. Due vertici distinti sono *adiacenti* se esiste un lato che li congiunge. Due lati distinti sono *adiacenti* se hanno un vertice in comune.

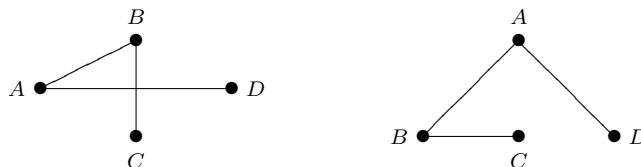


Per semplicità di scrittura, un lato $e = \{u, v\}$ è anche comunemente indicato con $e = uv$ (oppure vu).

DEFINIZIONE 2.7. Dato un vertice $v \in V$, si indica con $E(v)$ l'insieme di tutti i lati incidenti a v e con $N(v)$ l'insieme di tutti i vertici adiacenti a v (la lettera N è l'iniziale di "neighbour").

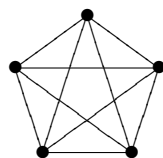
DEFINIZIONE 2.8. Un insieme di vertici (resp. di lati) è detto *indipendente* se non contiene coppie di vertici (resp. di lati) adiacenti.

Per rappresentare graficamente un grafo si disegna un punto per ogni vertice e un segmento (o un arco di curva) per ogni lato, in modo che tutte le relazioni di incidenza siano rispettate. Il modo in cui vengono disposti i punti corrispondenti ai vertici e gli archi corrispondenti ai lati è irrilevante. I due disegni di seguito riportati rappresentano lo stesso grafo $G = (V, E)$, con $V = \{A, B, C, D\}$ e $E = \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{B, C\}\}$.



DEFINIZIONE 2.9. L'*ordine* di un grafo G , indicato con $|G|$ oppure con $n(G)$, è il numero dei vertici di G . Il numero dei lati è invece detto la *grandezza* di G ed è indicato con $\|G\|$, oppure con $m(G)$.

DEFINIZIONE 2.10. Un grafo è detto *completo* se i suoi vertici sono a due a due adiacenti, cioè se ogni coppia di vertici è collegata da un lato. Un grafo completo con n vertici è indicato con K^n .



Il grafo K^5

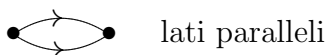
3. Altre nozioni di grafo

In questa sezione descriveremo alcune altre nozioni di grafo che è possibile incontrare nella letteratura matematica.

3.1. Grafi diretti, digrafi. Un *grafo diretto*, o *digrafo*, è una coppia (V, E) di insiemi disgiunti, con il dato di due funzioni

$$i : E \rightarrow V, \quad f : E \rightarrow V,$$

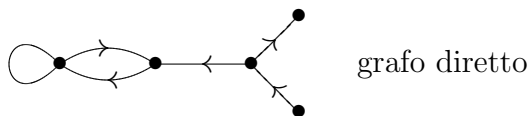
che associano a ogni lato $e \in E$ un vertice $i(e)$, detto *vertice iniziale*, e un vertice $f(e)$, detto *vertice finale*. Il lato e è detto *diretto* dal suo vertice iniziale $i(e)$ al suo vertice finale $f(e)$. Si noti che, in base a questa definizione, un grafo diretto può avere più lati tra la stessa coppia di vertici (tali lati sono detti *lati multipli*). Due lati, tra la stessa coppia di vertici, aventi la stessa direzione sono detti *paralleli*.



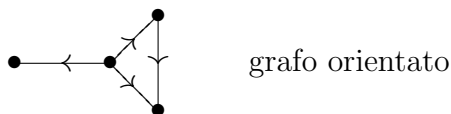
In un grafo diretto ci possono anche essere dei *cappi*, questo accade quando esistono dei lati e con $i(e) = f(e)$. Nel caso di un cappio l'orientazione è, naturalmente, irrilevante.



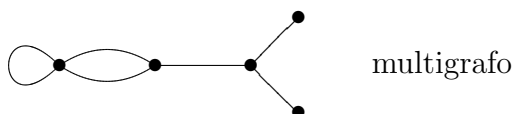
Il seguente è un esempio di grafo diretto:



3.2. Grafi orientati. Un *grafo orientato* è un grafo diretto privo di lati multipli e di cappi. In altri termini, un grafo orientato è un grafo ordinario in cui a ogni lato è stato assegnato un orientamento.



3.3. Multigrafi. Un *multigrafo* è una coppia (V, E) , dove V e E sono due insiemi disgiunti, con il dato di una mappa $E \rightarrow V \cup [V]^2$, che associa a ogni lato $e \in E$ uno, oppure due vertici in V , detti le estremità di e . In altri termini, un multigrafo è un grafo diretto privato delle informazioni sulle orientazioni dei lati.



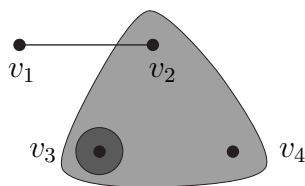


FIGURA 3. Un esempio di ipergrafo

3.4. Grafi a nastro. Un *grafo a nastro* (in inglese, *ribbon graph* o *fat graph*) è un multigrafo in cui i vertici sono rappresentati come piccoli dischi e i lati sono rappresentati da sottili nastri. In questo modo si ottiene, per ogni grafo a nastro, una superficie topologica compatta con bordo. Un grafo a nastro può, equivalentemente, essere definito nel modo seguente: è un multigrafo in cui, per ogni vertice v è stato fissato un ordinamento ciclico dei lati uscenti da v .

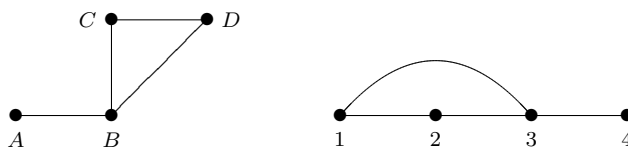
3.5. Ipergrafi. Come ulteriore generalizzazione del concetto di grafo si può incontrare quello di ipergrafo. Un *ipergrafo* è una coppia (V, E) , ove V è un insieme finito e E è un insieme di sottoinsiemi di V , di ogni cardinalità (non necessariamente 2). Se E contiene solo sottoinsiemi di V di cardinalità 2 si ritrova la solita definizione di grafo.

A titolo di esempio, consideriamo il seguente ipergrafo (V, E) , rappresentato graficamente nella figura 3:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_3\}\}.$$

4. Morfismi di grafi

A partire da questo momento ci occuperemo solo di grafi, nel senso della Definizione 2.1. Iniziamo la nostra discussione con un esempio. Consideriamo i due grafi seguenti:

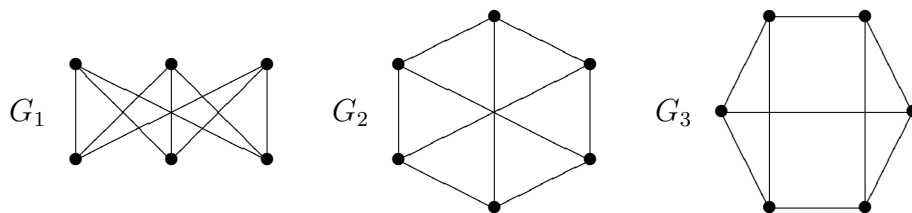


Essi sono diversi (hanno insiemi di vertici diversi), ma è chiaro che rappresentano entrambi la stessa “configurazione di collegamenti” e quindi possono essere identificati. Questo è un esempio di ciò che chiameremo *grafi isomorfi*. La definizione formale di isomorfismo di grafi è la seguente:

DEFINIZIONE 4.1. Due grafi $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ sono *isomorfi* se esiste una biiezione $\phi : V \xrightarrow{\sim} V'$ tale che $uv \in E$ se e solo se $\phi(u)\phi(v) \in E'$, per ogni $u, v \in V$. Una tale funzione ϕ è detta un *isomorfismo di grafi*. Se $G = G'$, ϕ è detta un *automorfismo* di G .

Normalmente non si fa alcuna distinzione tra grafi isomorfi, o meglio, si considerano i grafi a meno di isomorfismo. Si potrà anche scrivere semplicemente $G = G'$ al posto di $G \cong G'$.

Il problema di riconoscere se due grafi sono o meno isomorfi può non essere banale. Nell'esempio seguente i grafi G_1 e G_2 sono isomorfi, ma non sono isomorfi al grafo G_3 .



Tutti e tre questi grafi hanno lo stesso numero di vertici e di lati, e ogni vertice è incidente a tre lati. È facile vedere che G_1 e G_2 sono isomorfi (si determini, come esercizio, la biiezione ϕ tra i due insiemi di vertici). Per dimostrare che G_3 non è isomorfo ai due grafi precedenti si potrebbe cercare una qualche “proprietà” che valga per G_3 ma non per G_1 o G_2 (ad esempio, si può osservare che G_3 contiene tre vertici a due a due adiacenti, mentre questo non è vero per G_1 e G_2).

La definizione di isomorfismo di grafi, in base a quanto appena discusso, appare quindi del tutto naturale.

Più in generale, è possibile introdurre il concetto di morfismo di grafi.

DEFINIZIONE 4.2. Siano $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ due grafi. Un *morfismo* di grafi $f : G \rightarrow G'$ è una funzione $f : V \rightarrow V'$ tale che

$$uv \in E \Rightarrow f(u)f(v) \in E', \quad \forall u, v \in V.$$

Un morfismo $f : G \rightarrow G'$ è detto *pienamente fedele* se

$$uv \in E \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E', \quad \forall u, v \in V.$$

Un morfismo $f : G \rightarrow G'$ è detto *monomorfismo* se la mappa $f : V \rightarrow V'$ è iniettiva, *epimorfismo* se $f : V \rightarrow V'$ è suriettiva.

Siano $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ due grafi. Per ogni funzione $f : V \rightarrow V'$ indicheremo con $[f]^2 : [V]^2 \rightarrow [V']^2$ la funzione indotta da f , data da $[f]^2(\{u, v\}) = \{f(u), f(v)\}$. Richiedere che f definisca un morfismo di grafi equivale a richiedere che la restrizione di $[f]^2$ a E definisca una funzione $f_E = [f]^2|_E : E \rightarrow E'$.

OSSERVAZIONE 4.3. Se si preferisce usare la definizione di grafo data nell'Osservazione 2.3, la definizione di morfismo di grafi deve essere modificata come segue: un morfismo di grafi $f : G = (V, E, \phi) \rightarrow G' = (V', E', \phi')$ è una coppia di funzioni

$$f_V : V \rightarrow V', \quad f_E : E \rightarrow E'$$

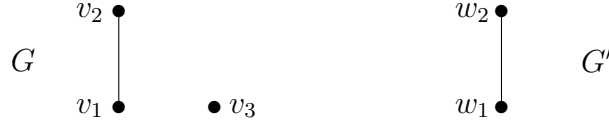
tali che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f_E} & E' \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi' \\ [V]^2 & \xrightarrow{[f_V]^2} & [V']^2. \end{array}$$

OSSERVAZIONE 4.4. Se $f : G \rightarrow G'$ è un morfismo di grafi, l'unica relazione tra la iniettività e/o suriettività di $f : V \rightarrow V'$ e le analoghe proprietà di $f_E : E \rightarrow E'$ è la seguente:

$$f : V \rightarrow V' \text{ iniettiva} \Rightarrow f_E : E \rightarrow E' \text{ iniettiva.}$$

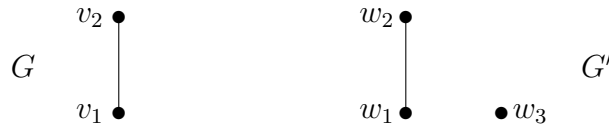
In particolare: (1) f_E può essere iniettiva senza che f lo sia. Esempio: $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$, con $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}\}$, $V' = \{w_1, w_2\}$, $E' = \{\{w_1, w_2\}\}$ e $f(v_1) = f(v_3) = w_1$, $f(v_2) = w_2$.



(2) f può essere suriettiva senza che f_E lo sia. Esempio: $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$, con $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}\}$, $V' = \{w_1, w_2, w_3\}$, $E' = \{\{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}\}$ e $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $f(v_3) = w_3$.



(3) f_E può essere suriettiva senza che f lo sia. Esempio: $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$, con $V = \{v_1, v_2\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}\}$, $V' = \{w_1, w_2, w_3\}$, $E' = \{\{w_1, w_2\}\}$ e $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$.



La definizione di isomorfismo di grafi data in precedenza è equivalente alla seguente:

DEFINIZIONE 4.5. Un morfismo di grafi $f : G \rightarrow G'$ è un isomorfismo se esiste un morfismo di grafi $g : G' \rightarrow G$ tale che $g \circ f = \text{id}_G$ e $f \circ g = \text{id}_{G'}$.

È immediato verificare che un isomorfismo di grafi è sia monomorfismo che epimorfismo. Il viceversa è, in generale, falso, come si vede dal seguente esempio:

$G = (V, E)$, $G' = (V', E')$, $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$, $V' = \{w_1, w_2, w_3\}$, $E' = \{\{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1, w_3\}\}$, $f : G \rightarrow G'$, $f(v_i) = w_i$, per $i = 1, 2, 3$.



In questo caso la mappa $f : V \rightarrow V'$ è una biiezione, ma i grafi G e G' non sono isomorfi. Infatti, pur essendo $f : V \rightarrow V'$ biiettiva, il morfismo di grafi $f : G \rightarrow G'$ non è invertibile.

5. Grafi e matrici

Abbiamo già visto come un grafo G possa essere descritto sia direttamente (cioè descrivendo esplicitamente gli insiemi $V(G)$ e $E(G)$) sia utilizzando una rappresentazione grafica. Vedremo ora come un grafo possa anche essere descritto in termini di matrici.

Sia $G = (V, E)$ un grafo. Sia $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ l'insieme dei vertici e $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ l'insieme dei lati di G . Per ogni coppia di vertici $v_i, v_j \in V$, poniamo

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{se } v_i v_j \notin E. \end{cases}$$

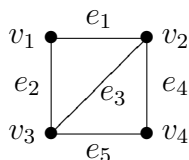
La matrice $A(G) = (a_{ij})$ è detta la *matrice di adiacenza* del grafo G ; è una matrice quadrata di ordine n , simmetrica, con coefficienti 0 o 1.

Un'altra matrice che si può associare al grafo G è la *matrice di incidenza* $B(G) = (b_{ij})$; è una matrice $n \times m$ definita ponendo

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v_i \text{ e il lato } e_j \text{ sono incidenti} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dalle definizioni date risulta ovvio che la conoscenza della matrice di adiacenza o della matrice di incidenza di un grafo è equivalente alla conoscenza del grafo stesso.

A titolo di esempio riportiamo le matrici di adiacenza A e di incidenza B associate al seguente grafo:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Operazioni sui grafi

Descriviamo qui alcune semplici operazioni che si possono effettuare dati due grafi $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$.

L'*unione* di G e G' è il grafo definito ponendo

$$G \cup G' = (V \cup V', E \cup E').$$

L'*intersezione* di G e G' è definita da

$$G \cap G' = (V \cap V', E \cap E').$$

Mentre l'unione di due grafi G e G' è sempre un grafo, la loro intersezione potrebbe non esserlo; questo accade quando $V \cap V' = \emptyset$ (a meno che non si ammetta l'esistenza di un grafo vuoto). In tal caso si dice che i grafi G e G' sono *disgiunti*.

Il grafo G' è un *sottografo* di G , e si scrive $G' \subseteq G$, se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Se $G' \subseteq G$ e E' contiene tutti i lati $uv \in E$, per ogni $u, v \in V'$, si dice che G' è un *sottografo indotto* di G . Se G' è sottografo indotto di G , si dice che esso è *generato* dal suo insieme di vertici V' (o che V' genera G' in G), e si scrive $G' = G[V']$. Pertanto, se $U \subseteq V$ è un qualsiasi sottoinsieme di vertici di G , si indica con $G[U]$ il grafo che ha U come insieme dei vertici e i cui lati sono tutti e soli i lati di G che hanno entrambe le estremità in U . Se H è un sottografo di G , scriveremo semplicemente $G[H]$ al posto di $G[V(H)]$. Se G' è un sottografo di G , si dice che esso è un sottografo *generante* (o sottografo *generatore* di G) se V' genera il grafo G , cioè se $V' = V$.

Sia $U \subseteq V$ un sottoinsieme qualsiasi di vertici di G . Scriveremo $G - U$ per indicare $G[V \setminus U]$. Il grafo $G - U$ è quindi ottenuto da G cancellando tutti i vertici in $V \cap U$ (cioè in U), e tutti i lati incidenti a tali vertici. Per semplicità scriveremo $G - G'$ al posto di $G - V(G')$.

Se $F \subseteq [V]^2$ (cioè se F è un insieme di lati), si pone

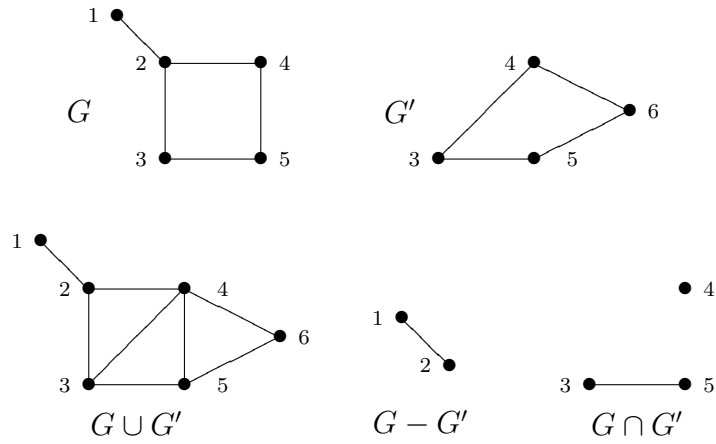
$$G - F = (V, E \setminus F), \quad G + F = (V, E \cup F).$$

Il *complementare* \bar{G} di un grafo G è il grafo che ha lo stesso insieme di vertici V di G e il cui insieme di lati è il complementare di E , cioè $[V]^2 \setminus E$.

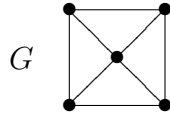
Se G e G' sono due grafi disgiunti, si indica con $G * G'$ il grafo ottenuto da $G \cup G'$ congiungendo ogni vertice di G con ogni altro vertice di G' . Si ha, ad esempio, $K^2 * K^3 = K^5$.

Per terminare, introduciamo il concetto di *grafo lineare* $L(G)$ di un grafo G . Dato un grafo $G = (V, E)$, il grafo lineare $L(G)$ è il grafo che ha E come insieme di vertici, con la condizione che due vertici $x, y \in E$ sono adiacenti in $L(G)$ se e solo se essi sono adiacenti in quanto lati di G .

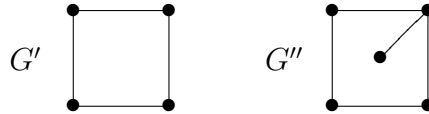
Illustriamo ora alcuni esempi di operazioni tra grafi.



Dato il grafo

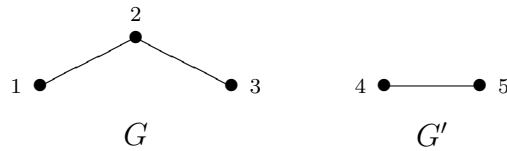


i due grafi G' e G'' sono entrambi sottografi di G ,

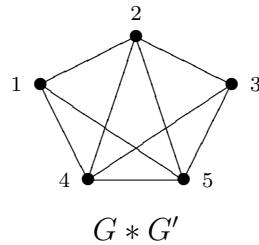


ma G' è anche sottografo indotto di G , mentre per G'' questo non vale.

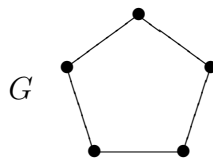
Dati i due grafi



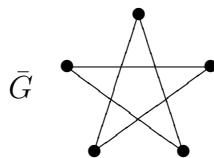
si ha



Il complementare del grafo

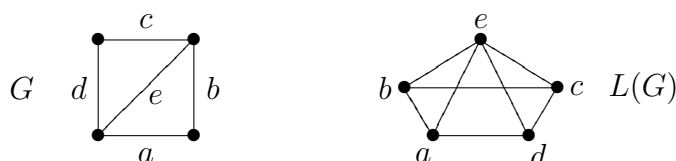


è il grafo



Tra l'altro, questo è un esempio di un grafo isomorfo al suo complementare, $G \cong \bar{G}$.

Infine, un esempio di grafo lineare $L(G)$ di un grafo G è il seguente:



7. Il grado dei vertici

DEFINIZIONE 7.1. Sia $G = (V, E)$ un grafo. Il *grado* (o *valenza*) di un vertice $v \in V$ è il numero di lati incidenti a v . Esso è indicato con $d(v)$. Un vertice è *pari* (risp. *dispari*) se il suo grado è pari (risp. dispari). Un vertice di grado 0 è detto *isolato*. Un vertice di grado 1 è detto *terminale*.

Possiamo ora dimostrare il primo teorema della teoria dei grafi:

TEOREMA 7.2. Sia G un grafo con n vertici e m lati. Sia $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Allora

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m.$$

DIMOSTRAZIONE. Dato che ogni lato è incidente a due vertici distinti, quando sommiamo i gradi di tutti i vertici ogni lato viene contato due volte. \square

Da questo teorema si deduce subito il seguente risultato:

COROLLARIO 7.3. In ogni grafo, il numero di vertici di grado dispari è pari.

OSSERVAZIONE 7.4. Il grado di un vertice è un esempio di un invariante² di un grafo di natura "locale." Due esempi di invarianti di natura "globale" sono dati dal *grado minimo* $\delta(G)$ e dal *grado massimo* $\Delta(G)$ di un grafo G , definiti ponendo

$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$$

e

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$

²Una "quantità" associata a un grafo è detta un *invariante* se è la stessa per tutti i grafi isomorfi al grafo dato.

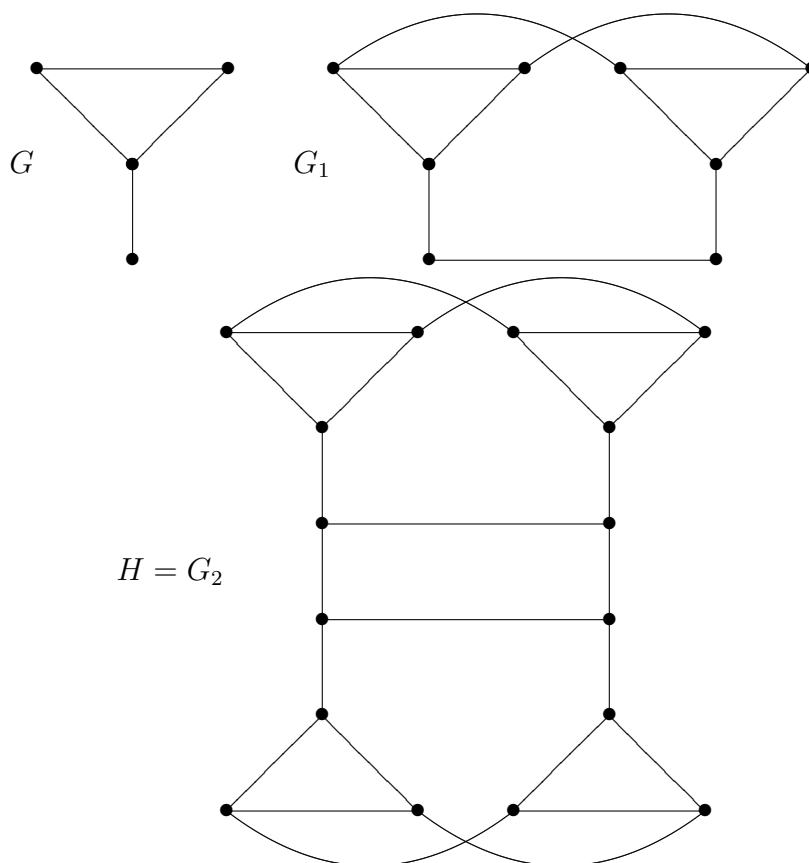
DEFINIZIONE 7.5. Un grafo è detto *regolare* se tutti i suoi vertici hanno lo stesso grado. Se tale grado è pari a k , si dice anche che il grafo è k -regolare. Un grafo 3-regolare è anche detto *cubico*.

A proposito dei grafi regolari, citiamo il seguente teorema:

TEOREMA 7.6. *Per ogni grafo G e ogni intero $r \geq \Delta(G)$, esiste un grafo r -regolare H che contiene G come sottografo indotto.*

DIMOSTRAZIONE. Se $r = \Delta(G)$ e G è r -regolare, basta prendere $H = G$. Supponiamo allora che G non sia r -regolare o che $r \geq \Delta(G)$. Sia G' una copia di G , colleghiamo i vertici di G di grado $< r$ con i corrispondenti vertici di G' e chiamiamo G_1 il grafo così ottenuto. Se G_1 è r -regolare, poniamo $H = G_1$, altrimenti ripetiamo l'operazione con G_1 al posto di G . È facile convincersi che dopo un numero finito k di passi (per la precisione, è $k = r - \delta(G)$) si arriva a un grafo r -regolare G_k che contiene G come sottografo indotto. \square

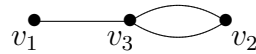
In questo esempio illustriamo la costruzione indicata nella dimostrazione precedente nel caso del grafo G , prendendo $r = \Delta(G) = 3$.



OSSERVAZIONE 7.7. La dimostrazione del teorema precedente è costruttiva, ma non è detto che il grafo H ottenuto in questo modo abbia ordine minore possibile.

ESEMPIO 7.8. Avendo chiamato *regolare* un grafo in cui tutti i vertici hanno lo stesso grado, potremo definire *irregolare* un grafo avente tutti i vertici di gradi diversi. Vogliamo dimostrare che non esistono grafi irregolari. Supponiamo quindi che G sia un grafo irregolare, e sia $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ l'insieme dei suoi vertici. Possiamo supporre che i vertici di G siano stati ordinati in modo tale che $d(v_1) < d(v_2) < \dots < d(v_n)$. Se $d(v_1) \geq 1$, si deduce che $d(v_n) \geq n$, quindi l'ultimo vertice v_n dovrebbe essere collegato con almeno altri n vertici di G ; questo è assurdo perché, togliendo v_n , rimangono solo altri $n - 1$ vertici. Se invece $d(v_1) = 0$, cioè se v_1 è un vertice isolato, si ottiene $d(v_n) \geq n - 1$, quindi v_n deve essere collegato con altri $n - 1$ vertici. Anche in questo caso ciò non è possibile, perché, togliendo v_n e anche v_1 (che sappiamo essere isolato), rimangono solo $n - 2$ vertici.

Notiamo che questo ragionamento non si applica nel caso dei multigrafi: il multigrafo seguente infatti ha tre vertici v_1 , v_2 e v_3 , con $d(v_i) = i$.



Un altro invariante di natura “globale” di un grafo G è il suo *grado medio* $d(G)$, definito ponendo

$$d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v).$$

Ovviamente si ha

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

A volte si introduce anche il *numero medio di lati per vertice*

$$\epsilon(G) = \frac{|E|}{|V|}.$$

Dal Primo Teorema della teoria dei grafi segue, tuttavia, che

$$|E| = m = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} d(G) |V|,$$

e quindi si ha

$$\epsilon(G) = \frac{1}{2} d(G).$$

In conclusione, $\epsilon(G)$ non è un nuovo invariante e potremo limitarci a considerare $d(G)$.

Facciamo ora alcune considerazioni di carattere generale sul grado. Se un grafo ha un elevato grado minimo, cioè se localmente ha molti lati per vertice, allora anche globalmente deve avere molti lati per vertice, dato che

$$\epsilon(G) = \frac{1}{2} d(G) \geq \frac{1}{2} \delta(G).$$

Il contrario non è ovviamente vero: un grafo può avere $\epsilon(G)$ grande (cioè in media molti lati per vertice) pur avendo $\delta(G)$ piccolo (cioè pur

esistendo alcuni vertici con pochi lati). A questo proposito è interessante analizzare il significato del prossimo risultato, il quale afferma che ogni grafo G ha un sottografo il cui grado medio non è inferiore al grado medio di G e il cui grado minimo è maggiore di $\epsilon(G)$, cioè della metà del grado medio di G .

PROPOSIZIONE 7.9. *Ogni grafo G con almeno un lato ha un sottografo H con*

$$\delta(H) > \epsilon(H) = \frac{1}{2} d(H) \geq \epsilon(G) = \frac{1}{2} d(G).$$

DIMOSTRAZIONE. Per costruire H partendo da G basta cancellare, uno alla volta, i vertici di grado basso, finché rimangono solo vertici di grado sufficientemente elevato. In questa fase però, bisogna stare attenti a non far diminuire il valore di ϵ . Bisogna quindi sapere fino a quale grado $d(v)$ possiamo cancellare un vertice v senza che il valore di ϵ diminuisca. Se cancelliamo un vertice v dobbiamo ovviamente cancellare anche i $d(v)$ lati a esso incidenti, quindi il valore di $\epsilon = \frac{|E|}{|V|}$, dopo la cancellazione di tale vertice diventa

$$\epsilon' = \frac{|E| - d(v)}{|V| - 1}.$$

Richiedendo che $\epsilon' \geq \epsilon$, si trova

$$\frac{|E| - d(v)}{|V| - 1} \geq \frac{|E|}{|V|},$$

che equivale a

$$d(v) \leq \frac{|E|}{|V|} = \epsilon.$$

Ciò significa che possiamo procedere alla cancellazione di tutti i vertici di grado $\leq \epsilon$. Costruiamo quindi, per induzione, una sequenza di sottografi indotti di G ,

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq H,$$

come segue: se il grafo G_i ha un vertice v_i di grado $d(v_i) \leq \epsilon(G_i)$, poniamo $G_{i+1} = G_i - v_i$, altrimenti terminiamo la sequenza e poniamo $H = G_i$. Per quanto visto sopra, si ha $\epsilon(G_{i+1}) \geq \epsilon(G_i)$, quindi alla fine sarà anche $\epsilon(H) \geq \epsilon(G)$. Inoltre H non possiede vertici che possano essere cancellati, cioè vertici di grado $\leq \epsilon(H)$, quindi è anche $\delta(H) > \epsilon(H)$. \square

CAPITOLO 2

Principali tipi di grafi e loro proprietà

1. Cammini e cicli

DEFINIZIONE 1.1. Un *cammino* è un grafo $P = (V, E)$ della forma

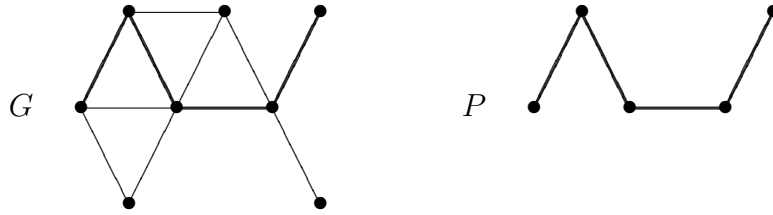
$$V = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_k\}, \quad E = \{v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k\},$$

dove, ovviamente, i vertici v_i sono tutti distinti. I vertici v_0 e v_k sono detti le *estremità* del cammino P , essi sono *collegati* da P . I rimanenti vertici v_1, v_2, \dots, v_{k-1} sono i vertici *interni* di P . Il numero di lati di un cammino P è detto la sua *lunghezza* (e coincide con il numero di vertici, meno uno). Un cammino di lunghezza k è anche indicato con P^k (si ha $P^0 = K^1$).

Un cammino P è spesso indicato solamente come sequenza di vertici:

$$P = v_0v_1v_2 \cdots v_k.$$

Nell'esempio qui riportato vediamo un cammino P di lunghezza 4 in un grafo G :

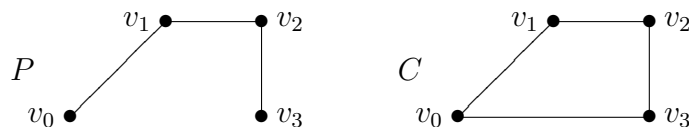


Elenchiamo ora alcune notazioni che si potranno incontrare nel seguito (per lo più sono intuitive). Sia $P = v_0v_1v_2 \cdots v_k$ un cammino di lunghezza k . Per ogni i e j , con $0 \leq i \leq j \leq k$, si pone: $Pv_i = v_0v_1 \cdots v_i$, $v_iP = v_iv_{i+1} \cdots v_k$, $v_iPv_j = v_i \cdots v_j$. Per la concatenazione di cammini si usano simboli intuitivi, come $PvQwR$, etc. Se u e v sono due vertici, un u - v cammino è un cammino che ha u e v come estremità.

Passiamo ora alla definizione dei cicli. Se $P = v_0v_1 \cdots v_{k-1}$ è un cammino, e $k \geq 3$, il grafo

$$C = P + v_{k-1}v_0$$

è detto un *ciclo*. Tale ciclo sarà anche indicato con $C = v_0v_1 \cdots v_{k-1}v_0$.



La *lunghezza* di un ciclo è il numero dei suoi lati, che coincide anche, in questo caso, con il numero dei suoi vertici. Un ciclo di lunghezza k è anche detto un k -ciclo, e indicato con C^k .

DEFINIZIONE 1.2. Sia G un grafo. La minima lunghezza di un ciclo contenuto in G è detta la *circonferenza minima* di G (*girth*, in inglese) ed è indicata con $g(G)$. La massima lunghezza di un ciclo contenuto in G è detta la *circonferenza* di G .

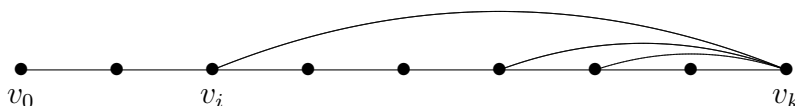
Un lato che congiunge due vertici di un ciclo C , ma non è esso stesso un lato di C , è detto una *corda*.

Dato un grafo G , un *ciclo indotto* in G è un ciclo che è anche un sottografo indotto di G . Si può quindi affermare che un ciclo indotto è un ciclo che non ha corde.

La proposizione seguente afferma che, se un grafo ha un elevato grado minimo, allora deve necessariamente contenere dei cammini e dei cicli lunghi.

PROPOSIZIONE 1.3. *Ogni grafo G , con grado minimo $\delta(G)$, contiene un cammino di lunghezza $\delta(G)$ e, se $\delta(G) \geq 2$, anche un ciclo di lunghezza almeno $\delta(G) + 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $v_0 \dots v_k$ un cammino di lunghezza massima in G . Allora tutti i vicini di v_k (cioè i vertici di G adiacenti a v_k) devono appartenere a questo cammino, altrimenti si potrebbe trovare, in G , un cammino ancora più lungo.



Da ciò si deduce che

$$\delta(G) \leq d(v_k) \leq k,$$

quindi esistono cammini di lunghezza (almeno) pari a $\delta(G)$. Per quanto riguarda l'esistenza di cicli, notiamo che, se $\delta(G) \geq 2$ e se indichiamo con i il minimo intero $< k$ tale che $v_i v_k \in E(G)$, allora $v_i \dots v_k v_i$ è un ciclo di lunghezza almeno pari a $\delta(G) + 1$. \square

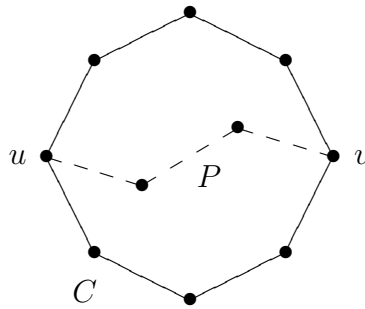
DEFINIZIONE 1.4. La *distanza* di due vertici u e v in un grafo G , indicata con $d_G(u, v)$, è la lunghezza del più corto u - v cammino in G . Se un tale cammino non esiste, si pone $d_G(u, v) = \infty$.

La massima distanza tra due vertici qualunque di G è detta il *diametro* di G , indicato con $\text{diam}(G)$. Il diametro e la circonferenza minima di un grafo G sono collegati dalla relazione seguente:

PROPOSIZIONE 1.5. *Ogni grafo G contenente un ciclo soddisfa*

$$g(G) \leq 2 \operatorname{diam}(G) + 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia C un ciclo di lunghezza minima in G . Se, per assurdo, fosse $g(G) \geq 2 \operatorname{diam}(G) + 2$, allora C avrebbe due vertici, u e v , la cui distanza, in C , sarebbe almeno pari a $\operatorname{diam}(G) + 1$. Ma la distanza, in G , tra questi due vertici è inferiore a questo valore (infatti, in G , la distanza tra due vertici qualsiasi deve essere $\leq \operatorname{diam}(G)$). Da ciò si deduce che ogni cammino P , di lunghezza $\leq \operatorname{diam}(G)$, che congiunge questi due vertici non può essere un sottografo di C .



Ma, in questo modo, utilizzando il cammino P e una delle “metà” del ciclo C che congiungono u e v , si viene a creare un ciclo in G di lunghezza inferiore a quella di C . Questo però è assurdo, dato che C era un ciclo di lunghezza minima. \square

DEFINIZIONE 1.6. Un vertice di un grafo G è detto *centrale* se la sua massima distanza da un qualsiasi altro vertice è la più piccola possibile. Tale distanza è detta il *raggio* di G , indicata con $\operatorname{rad}(G)$. Si ha quindi

$$\operatorname{rad}(G) = \min_{u \in V(G)} \left(\max_{v \in V(G)} d_G(u, v) \right).$$

Si verifica facilmente (farlo per esercizio) che, per ogni grafo G , si ha

$$\operatorname{rad}(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2 \operatorname{rad}(G).$$

Inoltre il raggio, il grado massimo e l'ordine di un grafo sono tra loro collegati, come indicato dal seguente risultato:

PROPOSIZIONE 1.7. *Sia G un grafo di raggio $\leq k$ e grado massimo $\leq d$. Allora il numero di vertici di G è $\leq 1 + kd^k$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia v un vertice centrale in G e sia V_i l'insieme dei vertici di G a una distanza pari a i dal vertice v . Allora, dato che il raggio di G è $\leq k$, si ha

$$V(G) = \bigcup_{i=0}^k V_i.$$

Ovviamente $|V_0| = 1$ (dato che $V_0 = \{v\}$), e dato che $\Delta(G) \leq d$, si ha sicuramente

$$|V_i| \leq d |V_{i-1}|,$$

per $i = 1, \dots, k$ (questo perché da ogni vertice in V_{i-1} escono al più d lati, quindi ogni vertice in V_{i-1} è adiacente, al massimo, a d vertici in V_i). Per induzione su i si ottiene quindi $|V_i| \leq d^i$. Sommando le cardinalità dei vari V_i , si ottiene

$$|G| \leq 1 + \sum_{i=1}^k d^i \leq 1 + k d^k. \quad \square$$

OSSERVAZIONE 1.8. In realtà, dato che, se $d \neq 1$, è

$$1 + \sum_{i=1}^k d^i = \frac{d^{k+1} - 1}{d - 1},$$

la dimostrazione precedente permette di concludere che (se $d \neq 1$)

$$|G| \leq \frac{d^{k+1} - 1}{d - 1},$$

che è una stima migliore di quella indicata nell'enunciato del teorema.

Definiamo ora alcune nozioni collegate con il concetto di cammino in un grafo.

DEFINIZIONE 1.9. Una *passeggiata* (in inglese, *walk*) in un grafo G è una successione finita del tipo “vertice, lato, vertice, lato, \dots , vertice”

$$u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{k-1}, e_k, u_k = v,$$

ove $u_i \in V(G)$, $e_i \in E(G)$ e ove si ha $e_i = u_{i-1}u_i$, per $i = 1, \dots, k$. Una passeggiata che ha u e v come vertici iniziale e finale è anche detta una u - v passeggiata. Una u - v passeggiata è detta *chiusa* se $u = v$, *aperta* altrimenti.

Si noti che, in base alla definizione, in una passeggiata ci possono essere sia vertici che lati ripetuti. Il numero k (numero di lati) è la *lunghezza* della passeggiata.

DEFINIZIONE 1.10. Un *percorso* (in inglese, *trail*) in un grafo G è una passeggiata in cui non ci sono lati ripetuti (cioè una passeggiata in cui tutti i lati sono distinti).

Ovviamente, in un percorso ci possono essere dei vertici ripetuti. Un cammino può essere identificato con un percorso in cui tutti i vertici sono distinti (cioè un percorso, o anche una passeggiata, in cui non ci sono vertici ripetuti).

PROPOSIZIONE 1.11. *Ogni u - v passeggiata in un grafo G contiene un u - v cammino.*

DIMOSTRAZIONE. Sia W una u - v passeggiata in G . Se $u = v$ allora il cammino triviale $\{u\}$ è contenuto in W . Supponiamo quindi che sia $u \neq v$. Se tutti i vertici di W sono distinti, allora W è un cammino. Supponiamo quindi che ci siano in W due vertici ripetuti, $u_i = u_j$, con $i < j$:

$$W : u = u_0, u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_k = v.$$

Se cancelliamo da W la sequenza u_i, \dots, u_{j-1} si ottiene una u - v passeggiata W_1 di lunghezza inferiore a W . Se W_1 non ha vertici ripetuti, allora W_1 è un cammino contenuto in W e abbiamo finito. Altrimenti ripetiamo il procedimento descritto con W_1 al posto di W . È evidente che, dopo un numero finito di passi, si trova un cammino contenuto in W , come richiesto. \square

Possiamo fornire un esempio dell'utilità delle matrici associate a un grafo. Dimostreremo che la potenza k -esima della matrice di adiacenza di un grafo G può essere usata per calcolare il numero di passeggiate tra due vertici qualsiasi di G .

TEOREMA 1.12. *Sia A la matrice di adiacenza di un grafo G , con*

$$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Allora, per ogni $k \geq 1$, l'elemento di posto (i, j) della matrice A^k è il numero delle passeggiate di lunghezza k che hanno come estremità i vertici v_i e v_j .

DIMOSTRAZIONE. L'asserto si dimostra per induzione su k . Per $k = 1$ l'enunciato è banalmente vero: esiste una v_i - v_j passeggiata di lunghezza 1 se e solo se i vertici v_i e v_j sono adiacenti, cioè se e solo se l'elemento di posto (i, j) della matrice A è uguale a 1.

Sia quindi $k > 1$ e supponiamo che l'enunciato valga per $k - 1$. Poniamo $A^{k-1} = (a_{ij}^{(k-1)})$. In base all'ipotesi induttiva, $a_{ij}^{(k-1)}$ è il numero di v_i - v_j passeggiate di lunghezza $k - 1$ in G . Se poniamo $A^k = (a_{ij}^{(k)})$, dall'uguaglianza $A^k = A^{k-1} \cdot A$ discende che

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^n a_{il}^{(k-1)} a_{lj}.$$

Osserviamo che ogni v_i - v_j passeggiata di lunghezza k consiste in una v_i - v_l passeggiata di lunghezza $k - 1$ seguita dal lato $v_l v_j$, per un qualche vertice v_l adiacente a v_j . Possiamo quindi affermare che il numero di v_i - v_j passeggiate di lunghezza k è la somma dei numeri delle v_i - v_l passeggiate di lunghezza $k - 1$, ove la somma è estesa a tutti i vertici v_l adiacenti a v_j (cioè tali che $a_{lj} = 1$). Dalla formula precedente, ricordando che (per ipotesi induttiva) $a_{il}^{(k-1)}$ è proprio il numero di v_i - v_l passeggiate di lunghezza $k - 1$, si conclude quindi che $a_{ij}^{(k)}$ coincide con il numero di v_i - v_j passeggiate di lunghezza k . \square

2. Connettività

DEFINIZIONE 2.1. Un grafo G è detto *connesso* se per ogni coppia di vertici $u, v \in V(G)$ esiste un u - v cammino in G .

PROPOSIZIONE 2.2. *I vertici di un grafo connesso G possono essere numerati in modo tale che tutti i sottografi $G_i = G[v_1, \dots, v_i]$, per $i = 1, 2, \dots, |G|$, siano connessi.*

DIMOSTRAZIONE. Chiamiamo v_1 un vertice qualunque di G . Dimosteremo l'enunciato per induzione sul numero di vertici. Se $|G| = 1$ non c'è nulla da dimostrare (G consiste del solo vertice v_1). Supponiamo quindi che i vertici v_1, v_2, \dots, v_k siano già stati scelti in modo tale che i grafi G_i siano connessi, per ogni $i \leq k$. Sia v un vertice qualsiasi di G non appartenente a G_k . Dato che G è connesso, esiste un v_1 - v cammino P in G . Indicheremo allora con v_{k+1} il primo vertice (contando a partire da v_1) di P che non appartiene a G_k ; in questo modo il vertice v_{k+1} ha almeno un vicino in G_k . Dato che $G_{k+1} = G_k[v_{k+1}]$, si deduce, da quanto sopra detto, che G_{k+1} è connesso. \square

DEFINIZIONE 2.3. Sia G un grafo. Un sottografo di G massimale rispetto alla proprietà di essere connesso è detto una *componente* (connessa) di G .

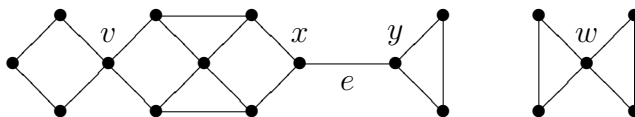
Sia $G = (V, E)$ un grafo. Siano A e B due sottoinsiemi di V e $X \subset V \cup E$.

DEFINIZIONE 2.4. L'insieme X *separa* gli insiemi A e B in G se ogni A - B cammino¹ in G contiene un vertice, oppure un lato, che appartiene a X .

DEFINIZIONE 2.5. Un *vertice di taglio* in un grafo G è un vertice che separa due altri vertici che appartengono alla stessa componente di G . Un *ponte* è un lato che separa le sue estremità.

Dalla definizione si deduce subito che i ponti in un grafo G sono precisamente quei lati di G che non appartengono ad alcun ciclo.

Come esempio consideriamo il grafo seguente:



I vertici di taglio sono quelli contrassegnati con le lettere v , x , y e w . Il lato e è l'unico ponte.

¹Un A - B cammino in G è un cammino avente un estremo nell'insieme A e l'altro estremo in B .

DEFINIZIONE 2.6. Sia k un numero naturale. Un grafo G è detto k -connesso se $|G| > k$ e se per ogni sottoinsieme $X \subset V(G)$ con $|X| < k$, il grafo $G - X$ è connesso.

In base a questa definizione ogni grafo è 0-connesso, mentre i grafi 1-connessi sono i grafi che abbiamo precedentemente chiamato connessi.

DEFINIZIONE 2.7. La *connettività* di un grafo G , indicata con $\kappa(G)$, è il più grande intero k tale che G sia k -connesso.

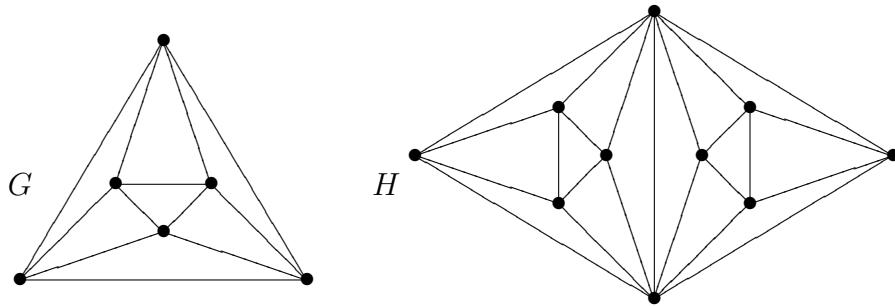
Si ha dunque $\kappa(G) = 0$ se e solo se il grafo G è sconnesso (oppure è un K^1). Si verifica immediatamente che $\kappa(K^n) = n - 1$, per ogni $n \geq 1$.

DEFINIZIONE 2.8. Sia ℓ un numero naturale. Un grafo G è detto ℓ -lato-connesso se $|G| > 1$ e se il grafo $G - F$ è connesso, per ogni sottoinsieme $F \subset E(G)$ di cardinalità minore di ℓ .

DEFINIZIONE 2.9. La *lato-connettività* di un grafo G , indicata con $\lambda(G)$, è il più grande intero ℓ tale che G sia ℓ -lato-connesso.

Se il grafo G è sconnesso, si ha $\lambda(G) = 0$.

A titolo di esempio consideriamo i due grafi seguenti:



Si ha: $\kappa(G) = \lambda(G) = 4$, mentre $\kappa(H) = 2$ e $\lambda(H) = 4$.

Si può facilmente verificare che, per ogni grafo non-triviale G , è

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

Di conseguenza, un grafo con una connettività elevata deve necessariamente avere anche un grado minimo elevato. Il viceversa è falso: un grafo con un elevato grado minimo non ha necessariamente una connettività elevata (è facile trovare degli esempi che illustrano quanto appena affermato). Tuttavia si può dimostrare che un grafo con un elevato grado minimo possiede necessariamente un sottografo altamente connesso. Più precisamente, vale il seguente risultato (di cui omettiamo la dimostrazione):

TEOREMA 2.10 (Mader, 1972). *Ogni grafo con grado medio $\geq 4k$ ha un sottografo k -connesso.*

3. Alberi e foreste

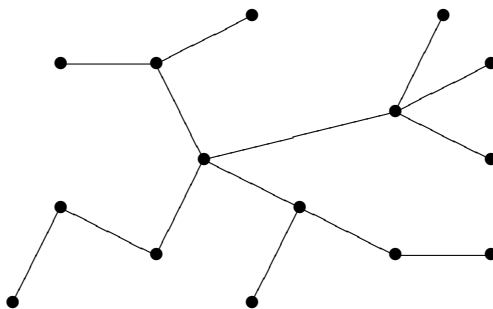
DEFINIZIONE 3.1. Una *foresta* è un grafo aciclico, cioè un grafo che non contiene cicli. Un *albero* è una foresta connessa.

Una foresta è quindi un grafo le cui componenti sono alberi.

DEFINIZIONE 3.2. Se T è un albero, le sue *foglie* sono i vertici di grado 1.

Si noti che ogni albero non triviale ha almeno due foglie. Inoltre, rimuovendo una foglia da un albero, il grafo che si ottiene è ancora un albero.²

Un esempio di albero è dato dal seguente grafo:



TEOREMA 3.3. Sia T un grafo. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) T è un albero.
- (ii) Due vertici qualunque di T sono sempre collegati da un unico cammino in T .
- (iii) T è minimamente connesso, cioè T è connesso, ma $T - e$ è sconnesso, per ogni lato e di T .
- (iv) T è massimamente aciclico, cioè T è aciclico, ma $T + xy$ contiene dei cicli, per ogni coppia di vertici non adiacenti x e y in T .

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. □

COROLLARIO 3.4. Ogni grafo connesso contiene un albero generante.

DIMOSTRAZIONE. Sia G un grafo connesso. Sia T un elemento minimale (rispetto alla relazione di inclusione) dell'insieme dei sottografi connessi generanti di G . T è dunque un sottografo di G generante e minimamente connesso e quindi, in base alla (iii) del teorema precedente, T è un albero. □

²Questo fatto è spesso utile nelle dimostrazioni per induzione.

COROLLARIO 3.5. *I vertici di un albero possono sempre essere numerati in modo tale che ogni vertice v_i , per $i \geq 2$, abbia un unico vicino nell'insieme $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ dei vertici precedenti.*

DIMOSTRAZIONE. In base alla Proposizione 2.2, i vertici di un grafo connesso G possono essere numerati in modo tale che $G_i = G[v_1, v_2, \dots, v_i]$ sia un grafo connesso, per ogni $i \geq 1$. Se, inoltre, $G = T$ è un albero, tutti i grafi $G_i = T_i$ sono alberi. Ora, se v_i non avesse alcun vicino in $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$, il grafo T_i sarebbe sconnesso; se invece v_i avesse più di un vicino in $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$, T_i conterrebbe almeno un ciclo. Entrambe queste possibilità sono però in contraddizione col fatto che T_i è un albero. \square

COROLLARIO 3.6. *Un grafo connesso con n vertici è un albero se e solo se ha $n - 1$ lati.*

DIMOSTRAZIONE. Sia T un albero. Numeriamo i suoi vertici

$$V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

come indicato nel corollario precedente. Osserviamo che tutti i grafi $T_i = T[v_1, v_2, \dots, v_i]$, per $i = 1, \dots, n$, sono degli alberi. Dimostreremo il risultato per induzione su i . Per $i = 1$ l'enunciato è banalmente verificato: il grafo T_1 ha 0 lati. Supponiamo che l'enunciato sia verificato per il grafo T_i . Dato che $T_{i+1} = T_i[v_{i+1}]$ e dato che v_{i+1} è collegato con T_i attraverso un solo lato, si deduce che T_{i+1} ha esattamente un lato in più di T_i , cioè ha esattamente i lati. Per $i = n$, si conclude quindi che $T = T_n$ ha esattamente $n - 1$ lati.

Viceversa, sia G un grafo connesso con n vertici e $n - 1$ lati. Poiché ogni grafo connesso contiene un albero generante, indichiamo con T un albero generante, $T \subset G$. Affermare che T sia un sottografo generante di G equivale ad affermare che $V(T) = V(G)$, di conseguenza T è un albero con n vertici e deve pertanto avere $n - 1$ lati. Ma allora si deve avere $T = G$, dato che G e T hanno gli stessi vertici e lo stesso numero di lati. Si conclude quindi che G è un albero. \square

COROLLARIO 3.7. *Se T è un albero e G è un grafo qualunque con $\delta(G) \geq |T| - 1$, allora G ha un sottografo isomorfo a T .*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con v_1, v_2, \dots, v_n i vertici di T , numerati come descritto nel Corollario 3.5. Dato che $\delta(G) \geq |T| - 1 = n - 1$, ogni vertice di G è collegato con almeno altri $n - 1$ vertici di G . Costruiamo un'applicazione $\phi : V(T) \rightarrow V(G)$ nel modo seguente. Scegliamo un vertice qualunque di G , chiamiamolo w_1 e poniamo $\phi(v_1) = w_1$. Osservando poi che v_2 è collegato con v_1 , scegliamo un qualsiasi vertice di G collegato con w_1 , chiamiamolo w_2 e poniamo $\phi(v_2) = w_2$. Per induzione, supponiamo di aver già definito $\phi(v_j) = w_j$, per ogni $j \leq i$. Dato che v_{i+1} ha un unico vicino, sia esso v_k , nell'insieme $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$, scegliamo un vertice di G collegato con w_k e

diverso dai vertici già utilizzati: questo si può fare perché $\delta(G) \geq n - 1$. Chiamiamo w_{i+1} il vertice così scelto e poniamo $\phi(v_{i+1}) = w_{i+1}$. In questo modo si costruisce un'applicazione ϕ che permette di identificare il grafo T con il sottografo $\phi(T)$ di G . \square

3.1. Alberi radicati. A volte è conveniente considerare un vertice di un albero come speciale. Un tale vertice viene detto una *radice* dell'albero.

DEFINIZIONE 3.8. Un *albero radicato* è un albero con una radice fissata.

La scelta di una radice r in un albero T determina un ordine parziale nell'insieme dei vertici di T : se $x, y \in V(T)$ si pone $x \preceq y$ se $x \in rTy$, cioè se l'unico cammino che congiunge r con y passa anche per il vertice x .

L'ordine parziale così definito in $V(T)$ è chiamato l'*ordine di albero* associato all'albero T e alla radice r fissata. In tale ordine, r è l'elemento minimo. Gli elementi massimali sono le foglie $x \neq r$. Infine ogni insieme del tipo

$$\{x \in V(T) \mid x \preceq y\},$$

per ogni y fissato in $V(T)$, è una catena, cioè un insieme di elementi a due a due confrontabili.

Premettiamo la seguente definizione:

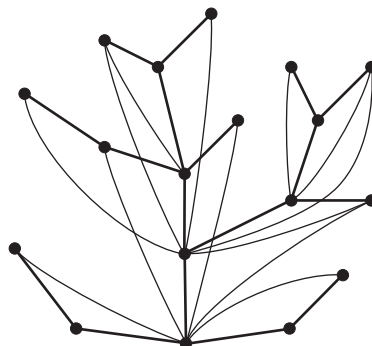
DEFINIZIONE 3.9. Dato un grafo G e un cammino P , diremo che P è un G -cammino se P è non-triviale e incontra il grafo G esclusivamente nelle sue estremità.

Consideriamo ora un albero radicato T contenuto in un grafo G .

DEFINIZIONE 3.10. L'albero radicato T è detto *normale* in G se le estremità di ogni T -cammino in G sono confrontabili nell'ordine di albero di T .

Se T genera G , richiedere che T sia un albero radicato normale in G equivale a richiedere che due vertici di T siano confrontabili nell'ordine di albero di T se essi sono adiacenti in G .

A titolo di esempio consideriamo il seguente grafo G :



L'albero T rappresentato usando linee di spessore maggiore è un albero radicato normale che genera il grafo G .

Gli alberi normali generanti, in un grafo G , sono anche chiamati “depth-first search trees”.³

PROPOSIZIONE 3.11. *Ogni grafo connesso contiene un albero normale generante, con un vertice qualsiasi fissato come radice.*

DIMOSTRAZIONE. Sia G un grafo connesso e sia $r \in G$ un vertice (qualsiasi) fissato. Sia T un albero normale massimale di radice r in G . Dimostriamo che $V(T) = V(G)$, cioè che T genera G .

Supponiamo, per assurdo, che sia $V(T) \neq V(G)$. Indichiamo con C una componente del grafo $G - T$, e sia $N(C)$ l'insieme dei vicini di C in T (in altre parole, $N(C)$ è l'insieme dei vertici di T che sono adiacenti a qualche vertice di C). Dato che T è un albero normale, $N(C)$ è una catena in T : infatti se $x, y \in N(C)$, dato che C è connesso, esiste un T -cammino che ha come estremità x e y e, pertanto, i due vertici x e y sono confrontabili nell'ordine di albero di T . Sia allora x il più grande elemento di $N(C)$, e sia $y \in C$ un vertice adiacente a x . Sia T' l'albero ottenuto da T aggiungendo il vertice y e il lato che collega x con y . Naturalmente l'ordine di albero di T si estende a T' . Se dimostriamo che anche T' è un albero normale otteniamo una contraddizione, perché avevamo supposto che T fosse massimale. Consideriamo allora un T' -cammino P in G . Se entrambe le estremità di P giacciono in T , esse sono confrontabili nell'ordine di albero di T e quindi anche in quello di T' , perché T è normale in G . Nel caso contrario una delle estremità di P deve essere il vertice y , quindi P è contenuto in C ad eccezione dell'altra estremità z , che giace in $N(C)$. Ma allora si deve avere $z \preceq x$, dato che x era il più grande elemento di $N(C)$. Tuttavia si ha anche $x \prec y$, perché y è una foglia di T' che ha come vicino x , e quindi si ha $z \prec y$, cioè, anche in questo caso, le due estremità y e z di P sono

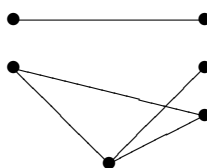
³Questo nome deriva dal modo in cui vengono utilizzati in informatica per effettuare le ricerche nei grafi.

confrontabili nell'ordine di albero di T' . Questo fatto dimostra quindi che T' è normale, il che contraddice l'ipotesi di massimalità di T . \square

4. Grafi bipartiti

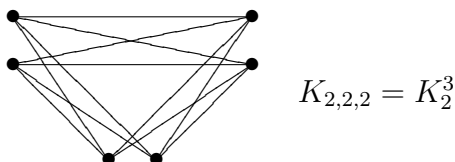
DEFINIZIONE 4.1. Un grafo $G = (V, E)$ è detto r -partito (ove $r \geq 2$ è un intero) se l'insieme dei vertici V ammette una partizione in r classi in modo tale che ogni lato di G abbia le due estremità in classi diverse. Un grafo 2-partito è detto *bipartito*.

Ad esempio, il seguente è un grafo 3-partito:

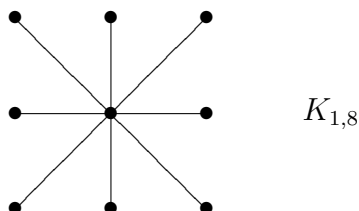


DEFINIZIONE 4.2. Un grafo r -partito è detto *completo* se due vertici qualunque, purché appartenenti a classi diverse, sono collegati da un lato.

Un esempio di grafo r -partito completo è il grafo $\overline{K}^{n_1} * \dots * \overline{K}^{n_r}$. Questo grafo viene anche indicato più semplicemente con K_{n_1, \dots, n_r} e, nel caso in cui si abbia $n_1 = \dots = n_r = s$, con K_s^r . In altri termini, K_s^r è il grafo r -partito completo in cui ogni classe contiene esattamente s vertici.



I grafi del tipo $K_{1,n}$ sono detti *stelle*.



Un'interessante caratterizzazione dei grafi bipartiti è data dal seguente risultato:

PROPOSIZIONE 4.3. *Un grafo è bipartito se e solo se non contiene cicli dispari.*

DIMOSTRAZIONE. Che un grafo bipartito non contenga cicli composti da un numero dispari di lati è del tutto ovvio. Viceversa, sia $G = (V, E)$ un grafo che non contiene cicli dispari. Innanzi tutto, osserviamo che un grafo è bipartito se tutte le sue componenti sono bipartite oppure triviali, quindi non è restrittivo supporre che G sia connesso. Sia ora T un albero generante in G . Fissiamo una radice $r \in T$ e indichiamo con \preceq_T l'ordine di albero così ottenuto nell'insieme $V = V(G) = V(T)$. Per ogni vertice $v \in V$, l'unico cammino che collega la radice r con v avrà lunghezza pari oppure dispari. Possiamo quindi definire una partizione di V in due sottoinsiemi, in base alla parità della lunghezza dei cammini che collegano r con v . Vogliamo dimostrare che questa partizione rende il grafo G un grafo bipartito.

Sia $e = xy$ un lato di G . Se $e \in T$ con, diciamo, $x \prec_T y$, allora si ha $rTy = rTxy$, e quindi x e y appartengono a classi diverse della partizione di V . Se invece $e \notin T$, allora $C_e = xTy + e$ è un ciclo. Dato che, per ipotesi, non esistono cicli dispari in G , il ciclo C_e deve essere pari, e quindi deve contenere un numero pari di vertici. Da questo si deduce che x e y devono necessariamente appartenere a classi diverse. \square

5. Cammini euleriani

DEFINIZIONE 5.1. Una passeggiata chiusa in un grafo è detta un *circuito di Eulero* se essa attraversa ogni lato del grafo una e una sola volta. Un grafo è detto *euleriano* se ammette un circuito di Eulero.

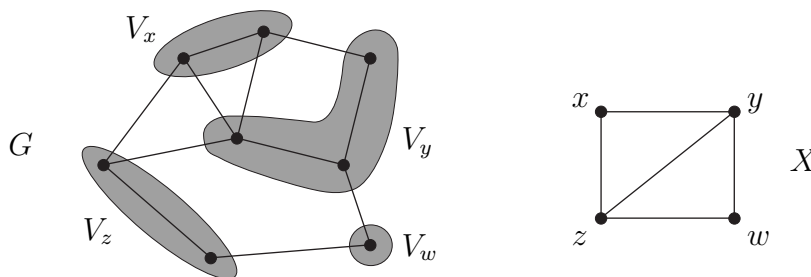
TEOREMA 5.2 (Eulero, 1736). *Un grafo connesso è euleriano se e solo se ogni vertice ha grado pari.*

DIMOSTRAZIONE. La condizione espressa sulla parità del grado dei vertici è ovviamente necessaria. Viceversa, sia G un grafo connesso in cui ogni vertice ha grado pari e sia

$$W = v_0e_0v_1e_1 \cdots v_{l-1}e_{l-1}v_l$$

una passeggiata in G , in cui nessun lato compare più di una volta, di lunghezza massima. Dato che W non può essere prolungata con l'aggiunta di altri lati, essa deve contenere tutti i lati incidenti a v_l e, per ipotesi, il numero di tali lati è pari. Ciò è possibile solo se $v_l = v_0$ (altrimenti l'ultimo lato e_{l-1} di W contribuirebbe a far diventare dispari il numero di lati incidenti a v_l). Abbiamo quindi dimostrato che W è una passeggiata chiusa. Supponiamo, per assurdo, che W non sia un circuito di Eulero, cioè che in W non compaiano tutti i lati di G . Deve quindi esistere un lato $e \in G$, tale che $e \notin W$ ma tale da avere uno dei suoi due vertici in W (si usa qui l'ipotesi che G sia connesso). Sia quindi $e = uv_i$ un tale lato, con $u \notin W$ e $v_i \in W$. Ma in questo modo si ottiene la passeggiata

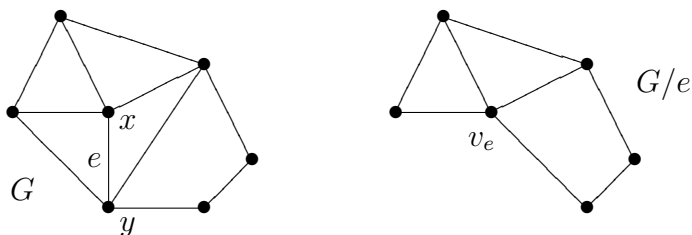
$$W' = uev_i e_i v_{i+1} e_{i+1} \cdots v_{l-1} e_{l-1} v_l e_0 v_1 e_1 \cdots e_{i-1} v_i,$$

FIGURA 1. $G = MX$

che è più lunga di W e in cui nessun lato compare più di una volta. Ciò contraddice la massimalità di W e pertanto W deve essere un circuito di Eulero. \square

6. Contrazioni e minori

Sia $G = (V, E)$ un grafo e sia $e = xy$ un suo lato. Indicheremo con G/e il grafo ottenuto da G contraendo il lato e in un nuovo vertice v_e (ciò equivale a identificare i due vertici x e y di G).



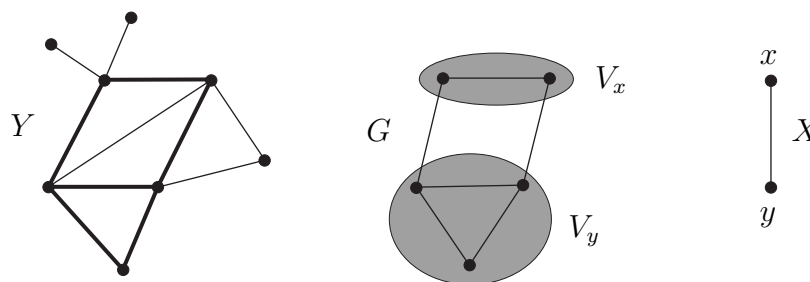
Più in generale, siano $G = (V(G), E(G))$ e $X = (V(X), E(X))$ due grafi.

DEFINIZIONE 6.1. Diremo che G è un MX, e scriveremo $G = MX$, se esiste una partizione $\{V_x \mid x \in V(X)\}$ di $V(G)$ in sottoinsiemi connessi con la proprietà che, per ogni $x, y \in X$, esiste un V_x - V_y lato in G se e solo se $xy \in E(X)$. Gli insiemi V_x sono detti *insiemi di ramificazione* del grafo G .

OSSERVAZIONE 6.2. Il simbolo MX (ove la lettera M sta per “minore”) indica tutta una classe di grafi. Con la scrittura $G = MX$ si intende dire che G appartiene alla classe MX.

Intuitivamente, il grafo X è ottenuto partendo da G e contraendo ogni insieme di ramificazione V_x in un unico vertice x , come si può vedere nella figura 1.

Nel caso particolare in cui $V_x = U \subset V(G)$ è uno degli insiemi di ramificazione, mentre tutti gli altri V_y contengono un solo vertice, si scriverà semplicemente G/U per indicare il grafo ottenuto contraendo

FIGURA 2. X è un minore di Y

tutto l'insieme U in un unico vertice v_U . Se $U = \{u_1, u_2\}$, allora G/U non è altro che G/e , ove e è il lato u_1u_2 .

PROPOSIZIONE 6.3. *Un grafo G è un MX se e solo se X si può ottenere da G tramite una serie di contrazioni di lati, cioè se e solo se esistono dei grafi G_0, G_1, \dots, G_n e dei lati $e_i \in G_i$ (per $i = 0, \dots, n-1$) tali che $G_0 = G$, $G_n = X$ e $G_{i+1} = G_i/e_i$, per ogni $i < n$.*

La dimostrazione è molto facile (induzione su $|G| - |X|$) e viene lasciata per esercizio.

Passiamo ora alla definizione di minore di un grafo.

DEFINIZIONE 6.4. Siano X e Y due grafi. Diremo che X è un *minore* di Y , e scriveremo $X \preceq Y$, se esiste un sottografo G di Y tale che $G = MX$.

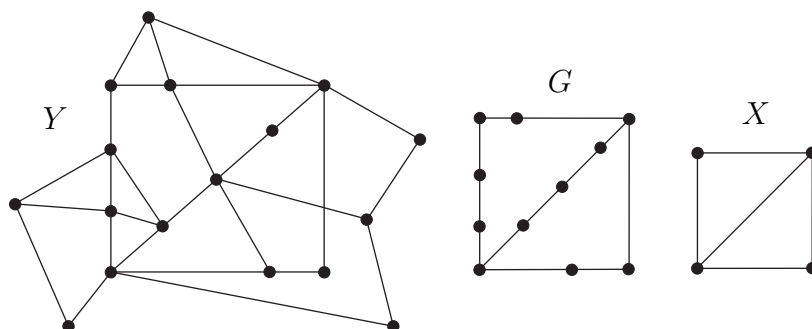
OSSERVAZIONE 6.5. Intuitivamente, dire che X è un minore di Y significa che X è ottenuto partendo da un qualche sottografo di Y e contraendone un certo numero di lati.

Nella figura 2, X è un minore di Y .

Possiamo osservare che, come caso particolare, ogni sottografo di un grafo è anche un suo minore. In questo senso la nozione di minore di un grafo è una generalizzazione della nozione di sottografo.

Dalla proposizione precedente (e dalla definizione di sottografo) si deduce che ogni minore di un grafo può essere ottenuto partendo dal grafo dato, cancellando qualche vertice e/o qualche lato e , in seguito, contraendo qualche altro lato. Viceversa, si può dimostrare che ogni grafo ottenuto, partendo da un grafo dato, attraverso ripetute cancellazioni (di lati e/o vertici) e contrazioni (di lati), in ogni ordine, ne è un suo minore. Questo fatto è ovvio nel caso di una sola cancellazione o contrazione e , nel caso generale, discende dal fatto che la relazione “essere un minore di” è transitiva.

DEFINIZIONE 6.6. Siano G e X due grafi. Il grafo G è detto una *suddivisione* di X se esso è ottenuto sostituendo i lati di X con dei cammini tra le loro estremità, con la proprietà che nessuno di questi cammini possieda un vertice interno appartenente a X o a qualche altro cammino. Se G è una suddivisione di X , scriveremo $G = TX$.

FIGURA 3. X è un minore topologico di Y

OSSERVAZIONE 6.7. Il simbolo TX (ove la lettera T sta per “topologico”) indica tutta una classe di grafi. Con la scrittura $G = TX$ intendiamo dire che G appartiene alla classe TX.

DEFINIZIONE 6.8. Diremo che X è un *minore topologico* di Y se esiste un sottografo G di Y tale che $G = TX$.

OSSERVAZIONE 6.9. Intuitivamente, dire che X è un minore topologico di Y significa che X è ottenuto partendo da un qualche sottografo G di Y , contraendone un certo numero di lati, ma senza modificare la “topologia” di G (in termini più precisi, i due grafi G e X devono essere omeomorfi, se considerati come spazi topologici nel modo ovvio).

Nella figura 3, X è un minore topologico di Y .

Se $G = TX$, l’insieme dei vertici di X può essere considerato come un sottoinsieme di $V(G)$. In tale contesto, i vertici di G che appartengono anche a $V(X)$ sono detti i *vertici di ramificazione* di G . Tutti gli altri vertici sono invece chiamati *vertici di suddivisione*. Tutti i vertici di suddivisione hanno grado 2, mentre i vertici di ramificazione di G hanno (in G) lo stesso grado che avevano considerati come vertici di X .

Per terminare, enunciamo i seguenti risultati, di cui omettiamo le dimostrazioni:

PROPOSIZIONE 6.10. *Ogni TX è anche un MX, quindi ogni minore topologico di un grafo ne è anche un suo minore. Se $\Delta(X) \leq 3$, ogni MX contiene un TX, quindi ogni minore con grado massimo ≤ 3 di un grafo ne è anche un suo minore topologico.*

PROPOSIZIONE 6.11. *Le relazioni “essere un minore di” e “essere un minore topologico di” sono ordini parziali nella classe dei grafi (finiti), cioè godono delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.*

CAPITOLO 3

Immersioni di grafi nel piano

1. Grafi piani e grafi planari

Iniziamo con alcune definizioni elementari.

DEFINIZIONE 1.1. Un *poligono* è un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 , unione disgiunta di un numero finito di segmenti di retta e omeomorfo al cerchio unitario. Un *arco poligonale* (o, più semplicemente, un *arco*) è un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 , unione disgiunta di un numero finito di segmenti di retta e omeomorfo all'intervallo chiuso $[0, 1]$.

Sia A un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 . Definiamo una relazione di equivalenza in A ponendo $P \sim Q$ se e solo se esiste un arco in A di estremi P e Q . Le classi di equivalenza sono dei sottoinsiemi aperti di A , detti le *regioni* di A .

Se $A \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto e $X \subset \mathbb{R}^2$ è un chiuso, diremo che X *separa* A se $A \setminus X$ ha più di una regione.

DEFINIZIONE 1.2. Sia X un sottoinsieme qualsiasi di \mathbb{R}^2 . La *frontiera* di X è l'insieme di tutti i punti $P \in \mathbb{R}^2$ tali che ogni intorno di P ha intersezione non vuota sia con X che con $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

TEOREMA 1.3 (Jordan). *Per ogni poligono P nel piano \mathbb{R}^2 , l'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus P$ ha esattamente due regioni, di cui solo una è limitata. Entrambe queste regioni hanno come frontiera il poligono P .*

Passiamo ora alla definizione dei grafi piani. Intuitivamente, un grafo piano G è un grafo disegnato nel piano in modo tale che non ci siano intersezioni “non volute” tra i lati, cioè tale che due lati qualsiasi di G si intersechino, al più, in un vertice di G . Più precisamente:

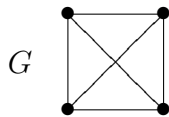
DEFINIZIONE 1.4. Un *grafo piano* G è una coppia $G = (V, E)$ tale che:

- (i) l'insieme dei vertici V è un sottoinsieme finito di \mathbb{R}^2 ;
- (ii) ogni lato $e \in E$ è un arco tra due vertici;
- (iii) lati diversi hanno insiemi diversi di estremità;
- (iv) l'interno di un lato non contiene vertici o punti di altri lati.

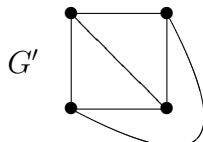
DEFINIZIONE 1.5. Un *grafo planare* è un grafo che è isomorfo a un grafo piano.

Un grafo planare è quindi un grafo astratto che *può* essere disegnato nel piano nel modo appena descritto, mentre un grafo piano è un grafo

che è disegnato nel piano come sopra detto. Ad esempio, il seguente grafo G è planare ma non piano.



Infatti esso è isomorfo al seguente grafo piano G' .



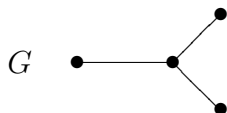
Nel seguito, tranne in casi particolari, non presteremo molta attenzione alla differenza tra i concetti di grafo piano e di grafo planare.

Sia ora $G = (V, E)$ un grafo piano e poniamo $\mathbb{R}^2 \setminus G = \mathbb{R}^2 \setminus (V \cup E)$ (questo è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2).

DEFINIZIONE 1.6. Le *facce* di un grafo piano G sono le regioni di $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

Dato che G è un insieme limitato, solo una delle sue facce sarà illimitata. Questa faccia è detta la *faccia esterna* di G . Tutte le altre facce sono dette *interne*. L'insieme delle facce di G è indicato con $F(G)$. Si noti che, se H è un sottografo di G , ogni faccia di G è contenuta in una faccia di H .

OSSERVAZIONE 1.7. Osserviamo che la faccia esterna di un grafo piano G esiste sempre. Questa potrebbe anche essere l'unica faccia di G , come accade nell'esempio seguente:



Vale il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione (che rientra nell'ambito della topologia).

PROPOSIZIONE 1.8. Sia G un grafo piano e sia e un lato di G .

- (i) Sia X la frontiera di una faccia di G . Allora e è interamente contenuto in X oppure X non interseca l'interno di e .
- (ii) Se e giace in un ciclo $C \subset G$, allora e giace sulla frontiera di esattamente due facce di G , e queste sono contenute in due facce distinte di C .
- (iii) Se e non giace in alcun ciclo, allora e giace sulla frontiera di esattamente una faccia di G .

COROLLARIO 1.9. La frontiera di una faccia di G è sempre (l'insieme dei punti di) un sottografo di G .

Sia G un grafo piano e f una sua faccia. Il sottografo di G il cui insieme dei punti è la frontiera di f è indicato con $G[f]$ ed è detto il *bordo* di f . Si dice anche che $G[f]$ *delimita* f .

La nozione di incidenza tra lati e vertici viene estesa anche alle facce, dicendo che una faccia è *incidente* ai lati e ai vertici del suo bordo.

Sia H un sottografo di G . Ogni faccia f di G è contenuta in una faccia f' di H . Se accade che $G[f]$ è un sottografo di H , allora si deve avere $f = f'$. In particolare, f è sempre una faccia del suo proprio bordo $G[f]$.

PROPOSIZIONE 1.10. *Una foresta piana ha esattamente una faccia.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione procede per induzione sul numero di lati. Per una foresta con 0 lati (o, se si preferisce, con 1 lato) l'enunciato è banalmente verificato. Supponiamo quindi che il risultato sia vero per tutte le foreste con un numero di lati $\leq n - 1$. Sia G una foresta con n lati. Togliendo un lato e si ottiene una foresta $G - e$ con $n - 1$ lati la quale, per ipotesi induttiva, ha esattamente una faccia f . Ma il lato e non può dividere la regione $\mathbb{R}^2 \setminus (G - e)$ in due, cioè non può dividere la faccia f in due facce, quindi anche G ha esattamente una faccia. \square

LEMMA 1.11. *Se un grafo piano G ha facce diverse con lo stesso bordo, allora G è un ciclo.*

Ciò significa che, con la sola eccezione dei cicli, in un grafo piano facce diverse hanno bordi diversi.

PROPOSIZIONE 1.12. *In un grafo piano 2-connesso ogni faccia è limitata da un ciclo.*

DEFINIZIONE 1.13. Un grafo piano G è detto *massimamente piano* se non è possibile aggiungere un nuovo lato in modo da ottenere un grafo piano G' con $V(G') = V(G)$.

DEFINIZIONE 1.14. Un grafo piano è detto una *triangolazione piana* se ogni sua faccia (compresa quella esterna) è limitata da un triangolo.

PROPOSIZIONE 1.15. *Un grafo piano di ordine ≥ 3 è massimamente piano se e solo se è una triangolazione piana.*

DIMOSTRAZIONE. Sia G un grafo piano di ordine ≥ 3 . Se G è una triangolazione piana, ogni sua faccia è limitata da un triangolo, quindi G è massimamente piano. Infatti ogni lato aggiuntivo dovrebbe avere il suo interno contenuto in una faccia di G e le sue estremità sul bordo di quella faccia, ma se il bordo è un triangolo queste due estremità sono già adiacenti in G , quindi non possono essere collegate da un ulteriore lato.

Viceversa, sia G un grafo massimamente piano. Sia f una faccia di G e sia $H = G[f]$ il suo bordo. Se H non fosse un triangolo (cioè se H avesse più di tre vertici) si potrebbero congiungere due dei suoi vertici non adiacenti con un ulteriore lato contenuto in f , ma questo contraddice l'ipotesi che G sia massimamente piano. \square

1.1. La formula di Eulero. Il seguente risultato è stato dimostrato da Eulero, nel 1752.

TEOREMA 1.16 (Formula di Eulero). *Sia G un grafo piano connesso con n vertici, m lati e ℓ facce. Allora*

$$n - m + \ell = 2.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo il numero di vertici n e facciamo induzione sul numero di lati m . Iniziamo osservando che m non può essere troppo piccolo: infatti, se $m = n - 1$ allora G è un albero, mentre se $m < n - 1$ il grafo G risulta sconnesso. Il primo passo dell'induzione consiste quindi nel verificare l'enunciato nel caso $m = n - 1$. In questo caso, come abbiamo già detto, G è un albero, quindi ha una sola faccia. Si ha quindi: $n - m + \ell = n - (n - 1) + 1 = 2$.

Supponiamo ora che $m \geq n$. In questo caso G non è un albero, quindi possiede almeno un ciclo C . Sia e un lato del ciclo C e sia $G' = G - e$. Il grafo G' ha lo stesso numero n di vertici di G , ma ha un lato in meno, quindi per G' l'enunciato in questione è valido, in base all'ipotesi induttiva. Dato che il lato e appartiene a un ciclo di G , esso giace sulla frontiera di esattamente due facce di G . Da ciò segue che, togliendo il lato e , il numero di facce diminuisce di uno, cioè G' ha una faccia in meno di G . La formula di Eulero per il grafo G' è quindi

$$n - (m - 1) + (\ell - 1) = 2,$$

e da ciò segue che $n - m + \ell = 2$. \square

COROLLARIO 1.17. *Se G è un grafo piano, non necessariamente connesso, con n vertici, m lati e ℓ facce, allora*

$$n - m + \ell = 1 + k(G),$$

ove $k(G)$ è il numero di componenti connesse di G .

COROLLARIO 1.18. *Un grafo piano (o planare) con n vertici ($n \geq 3$) ha, al più, $3n - 6$ lati. Ogni triangolazione piana con n vertici ha esattamente $3n - 6$ lati.*

DIMOSTRAZIONE. Dato che un grafo è massimamente piano se e solo se è una triangolazione piana, è sufficiente dimostrare la seconda affermazione. Sia quindi G una triangolazione piana con n vertici, m lati e ℓ facce. Dato che, in una triangolazione piana, il bordo di ogni faccia contiene 3 lati e ogni lato appartiene al bordo di due facce, si deve avere $3\ell = 2m$. Inserendo quindi il valore $\ell = \frac{2}{3}m$ nella formula di Eulero, si ottiene $n - \frac{1}{3}m = 2$, e quindi $m = 3n - 6$. \square

COROLLARIO 1.19. *Ogni grafo piano (o planare) ha almeno un vertice di grado ≤ 5 .*

DIMOSTRAZIONE. Sia G un grafo piano con n vertici e m lati. Poniamo $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Se $n \leq 6$ l'enunciato è banalmente verificato. Supponiamo quindi che $n > 6$. Dato che $m \leq 3n - 6$, si ha

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m \leq 6n - 12.$$

Se tutti i vertici v_i avessero grado ≥ 6 , dalla formula precedente si otterrebbe

$$6n \leq \sum_{i=1}^n d(v_i) \leq 6n - 12,$$

il che è assurdo. Quindi esiste almeno un vertice di grado ≤ 5 . \square

1.2. Grafi piani e poliedri. A ogni poliedro P è possibile associare un grafo piano $G(P)$ nel modo seguente. Si consideri una sfera S inscritta nel poliedro P . Proiettando, dal centro della sfera S , i vertici e i lati di P sulla sfera stessa, si ottiene un grafo $G'(P)$, disegnato sulla sfera S . Si scelga ora un punto $N \in S \setminus G'(P)$ e si consideri la proiezione stereografica dal punto N di $S \setminus N$ su un piano. Il grafo piano $G(P)$ associato al poliedro P è, per definizione, la proiezione di $G'(P)$ sul piano così ottenuta. Si verifica facilmente che $G(P)$ è ben definito, a meno di isomorfismo, cioè che scelte diverse della sfera S e del punto N producono grafi piani associati al poliedro P che sono tra loro isomorfi.

Nella figura 1 si può vedere il grafo piano associato a un cubo: in questo caso esso non è altro che l'ombra dei vertici e dei lati del cubo ottenuta posizionando una sorgente luminosa direttamente al di sopra del cubo stesso.

Dalla costruzione precedentemente descritta si deduce immediatamente che i vertici e i lati del grafo $G(P)$ sono identificati rispettivamente con i vertici e i lati del poliedro P , mentre le facce di P si identificano con le facce del grafo piano $G(P)$.



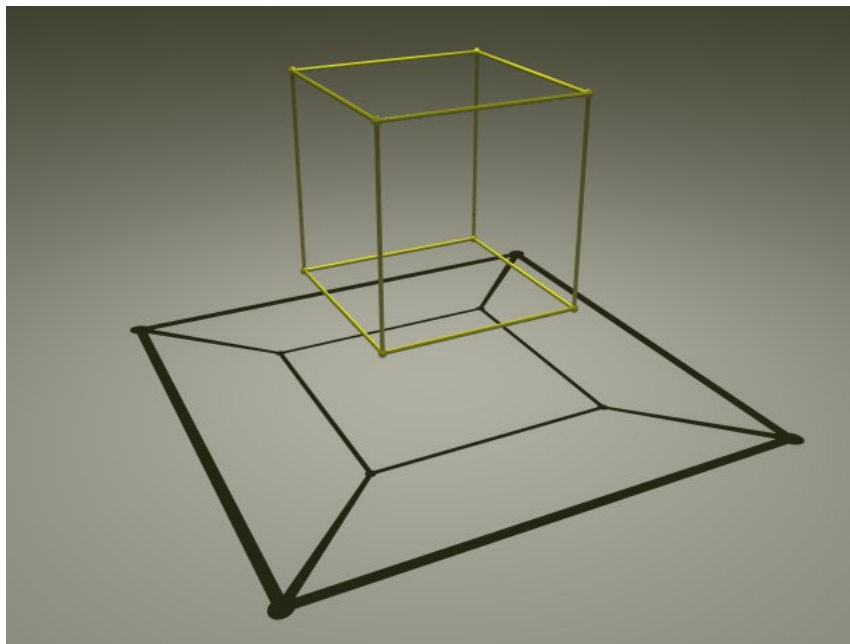


FIGURA 1. Il grafo piano associato a un cubo



Per ogni poliedro P indichiamo con V il numero dei suoi vertici, con E il numero dei suoi lati e con F il numero delle sue facce. Questi sono rispettivamente il numero dei vertici, dei lati e delle regioni del grafo piano $G(P)$. La formula di Eulero stabilisce quindi che:

PROPOSIZIONE 1.20. *Per ogni poliedro P si ha*

$$V - E + F = 2.$$

OSSERVAZIONE 1.21. Considerando che i poliedri sono noti fin dall'antichità, è forse sorprendente il fatto che la semplice relazione $V - E + F = 2$ non sia stata notata da qualcuno prima di Eulero. Più realisticamente, è possibile pensare che qualcuno l'abbia notata ma non sia stata ritenuta particolarmente degna di interesse.

Consideriamo un poliedro P . Indichiamo con V_k il numero di vertici di $G(P)$ di grado k (si ha $V_k = 0$ per $k \leq 2$) e con F_k il numero di facce limitate da un ciclo di lunghezza k (ovviamente si ha $F_k = 0$ per $k \leq 2$). Ricordando che in un grafo la somma dei gradi di tutti i vertici

è uguale al doppio del numero dei lati, si ha:

$$(1.1) \quad \sum_{k \geq 3} kV_k = 2E.$$

Analogamente è immediato verificare che

$$(1.2) \quad \sum_{k \geq 3} kF_k = 2E,$$

infatti nella sommatoria del membro di sinistra si contano tutti i lati, ma ogni lato viene contato due volte, dato che ciascun lato appartiene al bordo di esattamente due facce.

Il risultato che stabilisce che ogni grafo piano ha almeno un vertice di grado ≤ 5 ha come conseguenza il fatto che ogni poliedro possiede almeno un vertice in cui concorrono 3, 4 o 5 lati. Le formule precedenti permettono di dimostrare un risultato analogo per quanto riguarda le facce di un poliedro.

PROPOSIZIONE 1.22. *Ogni poliedro possiede almeno una faccia limitata da 3, 4 o 5 lati.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che, per un poliedro P , si abbia $F_3 = F_4 = F_5 = 0$. Dall'equazione (1.2) si ottiene:

$$2E = \sum_{k \geq 6} kF_k \geq \sum_{k \geq 6} 6F_k = 6 \sum_{k \geq 6} F_k = 6F,$$

quindi $E \geq 3F$. Ma, dall'equazione (1.1) si ottiene anche

$$2E = \sum_{k \geq 3} kV_k \geq \sum_{k \geq 3} 3V_k = 3 \sum_{k \geq 3} V_k = 3V.$$

Ricordando la formula di Eulero, si dovrebbe quindi avere

$$2 = V - E + F \leq \frac{2}{3}E - E + F = -\frac{1}{3}E + F \leq -\frac{1}{3}E + \frac{1}{3}E = 0,$$

il che è assurdo. \square

1.3. Poliedri regolari.

DEFINIZIONE 1.23. Un *poliedro regolare* è un poliedro le cui facce sono limitate da poligoni regolari congruenti e i cui angoli poliedrali (angoli solidi ai vertici) sono congruenti.

Mentre, nel caso del piano, i poligoni regolari sono infiniti, nel caso dello spazio tridimensionale è noto che esistono solo cinque tipi di poliedri regolari: il tetraedro, l'ottaedro, il cubo, l'icosaedro e il dodecaedro (vedi figura 2).

Ci proponiamo ora di dimostrare questo classico risultato.

TEOREMA 1.24. *Esistono esattamente cinque tipi di poliedri regolari.*

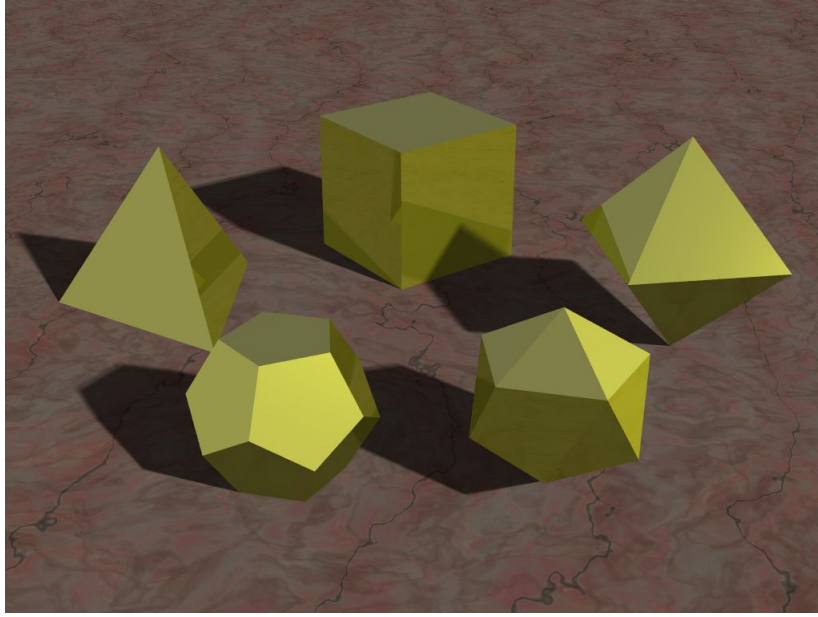


FIGURA 2. I cinque poliedri regolari

DIMOSTRAZIONE. Sia P un poliedro regolare e $G(P)$ il grafo piano a esso associato. Dato che $V - E + F = 2$, ricordando che $V = \sum_{k \geq 3} V_k$, $F = \sum_{k \geq 3} F_k$, $2E = \sum_{k \geq 3} kV_k = \sum_{k \geq 3} kF_k$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} -8 &= 2E + 2E - 4V - 4F \\ &= \sum_{k \geq 3} kF_k + \sum_{k \geq 3} kV_k - 4 \sum_{k \geq 3} V_k - 4 \sum_{k \geq 3} F_k \\ &= \sum_{k \geq 3} (k-4)F_k + \sum_{k \geq 3} (k-4)V_k. \end{aligned}$$

Poiché P è un poliedro regolare, esistono due interi $s \geq 3$ e $t \geq 3$ tali che $F_k = 0$ per $k \neq s$, $F_s = F$, $V_k = 0$ per $k \neq t$ e $V_t = V$. Dalle formule precedenti si ottengono quindi le seguenti uguaglianze:

$$(1.3) \quad 2E = sF_s = tV_t, \quad -8 = (s-4)F_s + (t-4)V_t.$$

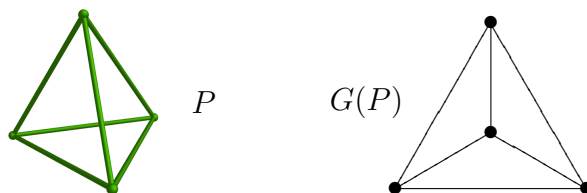
Poiché ogni poliedro ha almeno un vertice di grado ≤ 5 , si ha $3 \leq t \leq 5$. Analogamente, dato che ogni poliedro possiede almeno una faccia limitata da un ciclo di lunghezza ≤ 5 , si deve avere $3 \leq s \leq 5$. Quindi ci sono in tutto nove casi da considerare.

Caso 1: $s = 3, t = 3$. Le equazioni (1.3) diventano:

$$3F_3 = 3V_3, \quad -8 = -F_3 - V_3.$$

L'unica soluzione è $F_3 = V_3 = 4$. Il poliedro corrispondente è il *tetraedro*: ha 4 vertici di grado 3 e 4 facce costituite da triangoli

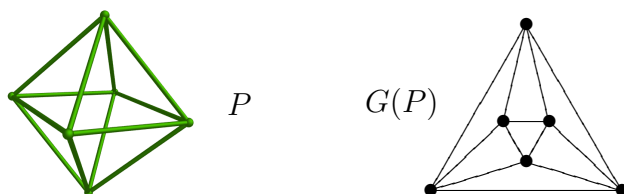
equilateri.



Caso 2: $s = 3, t = 4$. Le equazioni (1.3) diventano:

$$3F_3 = 4V_4, \quad -8 = -F_3.$$

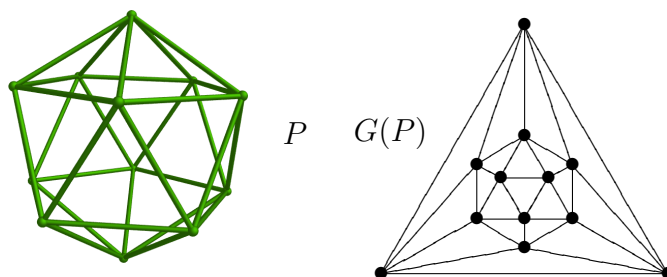
L'unica soluzione è $F_3 = 8$ e $V_4 = 6$. Il poliedro corrispondente è l'*ottaedro*: ha 6 vertici di grado 4 e 8 facce costituite da triangoli equilateri.



Caso 3: $s = 3, t = 5$. Le equazioni (1.3) diventano:

$$3F_3 = 5V_5, \quad -8 = -F_3 + V_5.$$

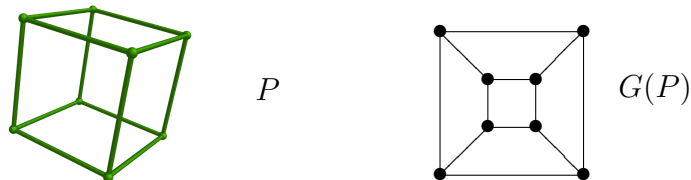
L'unica soluzione è $F_3 = 20$ e $V_5 = 12$. Il poliedro corrispondente è l'*icosaedro*: ha 12 vertici di grado 5 e 20 facce costituite da triangoli equilateri.



Caso 4: $s = 4, t = 3$. Le equazioni (1.3) diventano:

$$4F_4 = 3V_3, \quad -8 = -V_3.$$

L'unica soluzione è $F_4 = 6$ e $V_3 = 8$. Il poliedro corrispondente è il *cubo*: ha 8 vertici di grado 3 e 6 facce costituite da quadrati.

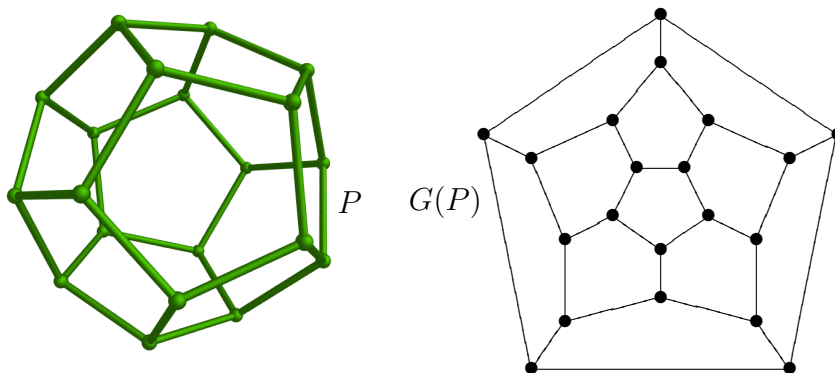


Casi 5 e 6: $s = 4, t = 4$ e $s = 4, t = 5$. In entrambi i casi le equazioni (1.3) non hanno soluzioni accettabili.

Caso 7: $s = 5, t = 3$. Le equazioni (1.3) diventano:

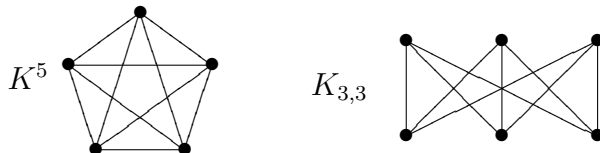
$$5F_5 = 3V_3, \quad -8 = F_5 - V_3.$$

L'unica soluzione è $F_5 = 12$ e $V_3 = 20$. Il poliedro corrispondente è il *dodecaedro*: ha 20 vertici di grado 3 e 12 facce costituite da pentagoni regolari.



Casi 8 e 9: $s = 5, t = 4$ e $s = 5, t = 5$. In entrambi i casi le equazioni (1.3) non hanno soluzioni accettabili. \square

1.4. Caratterizzazione dei Grafi Planari. I due grafi seguenti



giocano un ruolo molto importante nello studio dei grafi planari.

TEOREMA 1.25. *I grafi K^5 e $K_{3,3}$ non sono grafi planari.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per assurdo, che K^5 sia un grafo planare. Dato che K^5 ha $n = 5$ vertici e $m = 10$ lati, si ha $m > 3n - 6$, il che contraddice il risultato stabilito nel Corollario 1.18. Se ne deduce che K^5 non può essere un grafo planare.

Supponiamo ora che $K_{3,3}$ sia un grafo planare e consideriamo una sua immersione piana. Poiché $K_{3,3}$ è un grafo bipartito, esso non può avere cicli dispari, di conseguenza ciascuna delle sue facce deve essere limitata da almeno quattro lati. Indichiamo con ℓ il numero di facce di $K_{3,3}$ e con N la somma, estesa a tutte le facce, del numero di lati che delimitano ciascuna faccia. Da quanto appena detto, si deve avere $N \geq 4\ell$. Osserviamo che è facile determinare il valore di N : il grafo $K_{3,3}$ ha 9 lati, e nella somma il cui risultato è N ogni lato viene contato due volte (dato che ogni lato appartiene al bordo di esattamente due facce), quindi $N = 18$. Si conclude quindi che $\ell \leq \frac{N}{4} = \frac{9}{2}$. Tuttavia, dalla formula di Eulero, si ottiene:

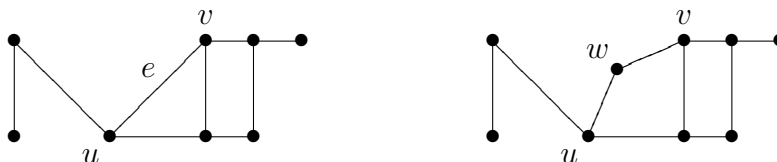
$$\ell = 2 - n + m = 2 - 6 + 9 = 5,$$

il che contraddice la stima precedente. Si conclude quindi che $K_{3,3}$ non può essere un grafo planare. \square

Prima di poter presentare una caratterizzazione dei grafi planari, abbiamo bisogno della seguente definizione:

DEFINIZIONE 1.26. Una *suddivisione elementare* di un grafo G è un grafo ottenuto da G rimuovendo un qualche lato $e = uv$ e aggiungendo un nuovo vertice w assieme ai due lati uw e vw .

Nell'esempio seguente, il grafo di destra è una suddivisione elementare di quello di sinistra.



DEFINIZIONE 1.27. Una *suddivisione* di un grafo G è un grafo ottenuto da G attraverso una successione finita di suddivisioni elementari.

È del tutto elementare verificare che una qualunque suddivisione di un grafo G è planare o non-planare a seconda che G sia planare o meno. Osserviamo inoltre che un grafo che contenga un sottografo non-planare non può essere planare.

Combinando queste due osservazioni col teorema precedente, si ottiene il seguente risultato:

TEOREMA 1.28. *Se un grafo G contiene un sottografo isomorfo a una suddivisione di K^5 o di $K_{3,3}$, allora G non è planare.*

La cosa sorprendente è che, in effetti, vale anche il viceversa:

TEOREMA 1.29 (Kuratowski, 1930; Wagner, 1937). *Un grafo è planare se e solo se non contiene alcun sottografo che sia una suddivisione di K^5 o di $K_{3,3}$.*

CAPITOLO 4

Colorazioni

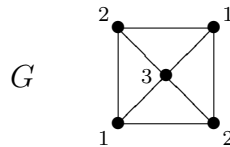
1. Colorazioni di vertici o di lati

DEFINIZIONE 1.1. Una *colorazione dei vertici* di un grafo $G = (V, E)$ è una funzione $c : V \rightarrow S$ tale che $c(v) \neq c(w)$ se i vertici v e w sono adiacenti (S è un insieme qualsiasi, i cui elementi sono detti *colori*). Una colorazione dei vertici $c : V \rightarrow S$ è detta una *k-colorazione* se l'insieme S ha k elementi.

Solitamente il problema che ci si pone è quello di scoprire qual'è il più piccolo intero positivo k tale che un determinato grafo G ammetta una k -colorazione.

DEFINIZIONE 1.2. Il *numero cromatico* di un grafo G , indicato con $\chi(G)$, è il più piccolo intero positivo k tale che G ammetta una k -colorazione. Un grafo G con $\chi(G) = k$ è detto *k-cromatico*. Se $\chi(G) \leq k$ si dice che il grafo G è *k-colorabile* (cioè esistono delle k -colorazioni dei vertici di G).

Nell'esempio seguente è indicata una colorazione del grafo $G = (V, E)$ con 3 colori, $c : V \rightarrow \{1, 2, 3\}$:



OSSERVAZIONE 1.3. Si noti che una k -colorazione dei vertici di un grafo non è altro che una partizione dell'insieme dei vertici in k classi, chiamate ora *classi di colore*, con la proprietà che non esistono lati che collegano vertici appartenenti a una stessa classe. Di conseguenza, un grafo è k -colorabile se e solo se è k -partito.

In modo del tutto analogo alle colorazioni dei vertici, si possono anche definire le colorazioni dei lati:

DEFINIZIONE 1.4. Una *colorazione dei lati* di un grafo $G = (V, E)$ è una funzione $c : E \rightarrow S$ tale che $c(e) \neq c(f)$ se i lati e e f sono adiacenti (S è un insieme qualsiasi, i cui elementi sono detti *colori*). Una colorazione dei lati $c : E \rightarrow S$ è detta una *k-colorazione dei lati* se l'insieme S ha k elementi.

DEFINIZIONE 1.5. Il *numero lato-cromatico* (anche detto *indice cromatico*) di un grafo G , indicato con $\chi'(G)$, è il più piccolo intero positivo k tale che G ammette una k -colorazione dei lati. Un grafo G con $\chi'(G) = k$ è detto *k -lato-cromatico*. Se $\chi'(G) \leq k$ si dice che il grafo G è *k -lato-colorabile* (cioè esistono delle k -colorazioni dei lati di G).

Osserviamo che una colorazione dei lati di un grafo G è equivalente a una colorazione dei vertici del grafo lineare $L(G)$; si ha pertanto $\chi'(G) = \chi(L(G))$. Di conseguenza, lo studio delle colorazioni dei lati dei grafi può essere considerato come un caso particolare dello studio delle colorazioni dei vertici.

Nel seguito ci occuperemo solo delle colorazioni dei vertici.

2. Colorazioni di vertici e grafi planari

Nello studio delle colorazioni dei vertici dei grafi planari, il risultato più noto (e uno dei più noti di tutta la teoria dei grafi) è, senza dubbio, il seguente:

TEOREMA 2.1 (Teorema dei 4 colori). *Ogni grafo planare è 4-colorabile.*

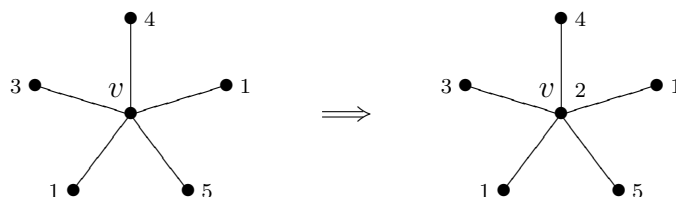
La dimostrazione di questo teorema è alquanto complicata, e molte parti di essa richiedono l'uso di un calcolatore (si tratta di effettuare delle verifiche su svariate centinaia, o migliaia, di configurazioni possibili). Noi ci accontenteremo di dimostrare il seguente risultato più debole:

TEOREMA 2.2 (Teorema dei 5 colori). *Ogni grafo planare è 5-colorabile.*

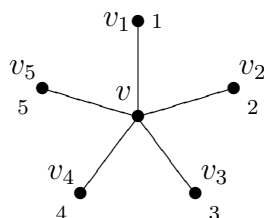
DIMOSTRAZIONE. Sia G un grafo planare con n vertici e m lati. Consideriamo una sua immersione piana e indichiamo ancora con G il corrispondente grafo piano. Se $n \leq 5$ l'enunciato è banalmente verificato. Supponiamo quindi che si abbia $n \geq 6$. Dimostreremo il risultato per induzione sul numero di vertici.

Supponiamo dunque che ogni grafo planare con meno di n vertici sia 5-colorabile. Dato che G è un grafo piano, esso contiene sicuramente un vertice v di grado ≤ 5 . Sia $H = G - v$. Poiché H è un grafo piano con $n - 1$ vertici, esso è 5-colorabile, per l'ipotesi induttiva. Sia allora $c : V(H) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ una colorazione dei vertici di H . Se la colorazione c usa al massimo 4 colori per i vertici di H che sono adiacenti a v , è possibile estendere c a una colorazione di tutti i vertici di G che usa al più 5 colori (basta attribuire a v uno dei colori non

utilizzati per i vicini di v , come nell'esempio seguente).

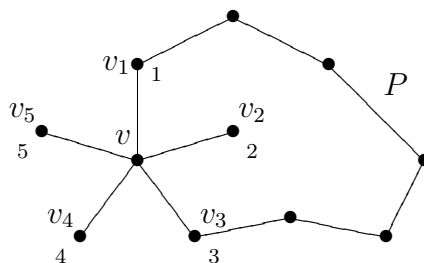


L'unico caso che rimane quindi da considerare è quello in cui ci sono esattamente 5 vertici adiacenti a v e questi 5 vertici sono stati colorati con 5 colori diversi. Denotiamo i cinque vertici adiacenti a v con v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 (partendo da uno qualunque di essi e ruotando in senso orario). Senza perdita di generalità possiamo supporre che $c(v_i) = i$, per $i = 1, 2, 3, 4, 5$, come nella figura seguente:



Dati $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, indichiamo con $H_{i,j}$ il sottografo indotto di H contenente solo i vertici il cui colore è i oppure j . Consideriamo, ad esempio, $H_{1,3}$. Esso contiene sicuramente i vertici v_1 e v_3 , ma non è detto che sia connesso. Indichiamo quindi con C_1 la componente di $H_{1,3}$ che contiene v_1 . Se $v_3 \notin C_1$, noi possiamo scambiare tra loro i colori 1 e 3 dei vertici nella componente C_1 . In questo modo si ottiene un'altra colorazione di H , ma ora il vertice v_1 ha colore 3, esattamente come v_3 . Ora è quindi possibile assegnare al vertice v il colore 1, ottenendo così una 5-colorazione di G .

Rimane quindi ancora da considerare il caso in cui $v_3 \in C_1$, cioè il caso in cui esiste in $H_{1,3}$ un cammino P che collega v_1 con v_3 . Sia quindi P un tale cammino. Aggiungendo a P i lati vv_1 e vv_3 si ottiene un ciclo C con la proprietà che i vertici v_2 e v_4 appartengono a facce diverse di C , come indicato nella figura seguente:



Consideriamo ora il sottografo $H_{2,4}$. Dato che P è contenuto in $H_{1,3}$, si deve avere $P \cap H_{2,4} = \emptyset$ (un vertice che appartenesse sia a P che a

$H_{2,4}$ dovrebbe avere colore 1 oppure 3, ma anche 2 oppure 4, il che è assurdo). Da ciò si deduce che i vertici v_2 e v_4 devono appartenere a componenti diverse di $H_{2,4}$, in particolare la componente C_2 di $H_{2,4}$ che contiene v_2 non può contenere anche v_4 . Ma allora, nella componente C_2 , è possibile scambiare tra loro i colori 2 e 4. In questo modo si ottiene un'altra colorazione di H , con la proprietà che il vertice v_2 ha ora colore 4. In questo caso possiamo assegnare al vertice v il colore 2, ottenendo ancora una volta una 5-colorazione di G . Questo esaurisce la lista di casi possibili, quindi la dimostrazione è terminata. \square

Una conseguenza del teorema appena dimostrato, e del teorema dei 4 colori, è il seguente risultato (anch'esso ben noto), di cui omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 2.3 (Grötzsch, 1959). *Ogni grafo planare che non contiene un triangolo è 3-colorabile.*

3. Numeri cromatici e altri invarianti

Ritornando al problema generale delle colorazioni dei vertici di un grafo, alcune domande che sorgono naturalmente sono le seguenti:

- (1) Come si può determinare il numero cromatico di un determinato grafo?
- (2) Come si può determinare una colorazione dei vertici di un dato grafo che usi il minor numero di colori possibile?
- (3) In che modo il numero cromatico è collegato agli altri invarianti di un grafo (quali il grado medio, la connettività, la circonferenza minima, etc.)?

In questa sezione ci proponiamo di analizzare questo tipo di questioni.

Per quanto concerne la determinazione del numero cromatico di un grafo, il seguente risultato fornisce una stima dall'alto:

PROPOSIZIONE 3.1. *Per ogni grafo G con m lati, si ha*

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia c una colorazione dei vertici di G con $k = \chi(G)$ colori. Per ogni coppia di classi di colore, il grafo G deve avere almeno un lato che collega un vertice della prima classe con un vertice della seconda: se questo non fosse vero, cioè se esistessero due classi di colore non collegate da alcun lato, si potrebbe costruire una nuova colorazione dei vertici di G assegnando ai vertici di queste due classi lo stesso colore, e questa nuova colorazione userebbe meno di $\chi(G)$ colori, il che è assurdo. Si deduce che il numero m dei lati di G deve essere maggiore o uguale del numero di coppie (non ordinate) di classi di colore, cioè

$$m \geq \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Ricavando k da questa disuguaglianza, si trova

$$k = \chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}. \quad \square$$

OSSERVAZIONE 3.2. In generale, la stima fornita dalla proposizione precedente non è migliorabile. Infatti, nel caso di un grafo completo con n vertici, $G = K^n$, si ha $m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ e $\chi(G) = n$ (dato che ogni vertice di G è collegato con ogni altro vertice, una colorazione dei vertici di G deve necessariamente assegnare a ogni vertice un colore diverso, quindi servono esattamente n colori). In questo caso si ottiene quindi

$$n = \chi(G) = \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

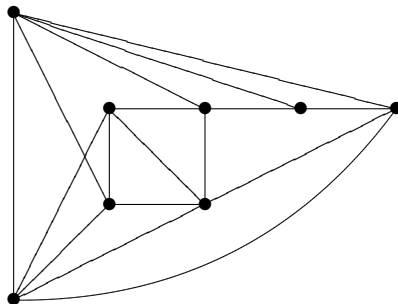
Passiamo ora alla seconda questione: determinare un algoritmo per colorare i vertici di un grafo utilizzando il minor numero possibile di colori. L'algoritmo più elementare che si possa immaginare è il seguente:

- (1) Si numerino (in un ordine qualsiasi) i vertici di G : $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.
- (2) Si assegni a v_1 il colore 1; se v_2 è collegato con v_1 si assegni a v_2 il colore 2, altrimenti si assegni a v_2 il colore 1; ... In generale, per ogni $i = 1, \dots, n$, si assegni all' i -esimo vertice v_i il colore s , dove s è il più piccolo intero ≥ 1 che non è già stato assegnato come colore ad alcuno dei vertici v_j adiacenti a v_i , con $j < i$.

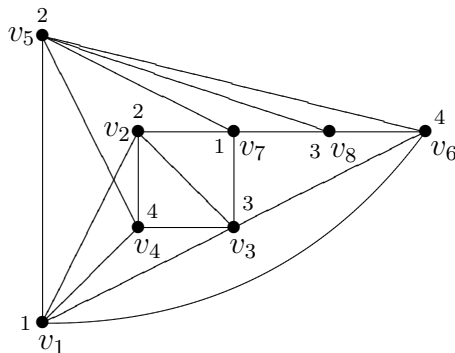
In sostanza, si percorre tutto l'elenco dei vertici, assegnando a ogni vertice il più piccolo colore disponibile, controllando che questo non sia già stato assegnato a qualcuno dei vertici *precedenti*, adiacenti al vertice di cui ci stiamo occupando. Questo algoritmo è spesso chiamato l'algoritmo "avaro."

Naturalmente, applicando questo algoritmo partendo da due numerazioni diverse dei vertici di G , si otterranno due colorazioni diverse, che potranno anche utilizzare un diverso numero di colori.

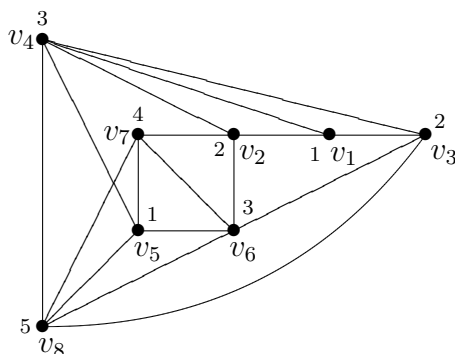
A titolo di esempio consideriamo il seguente grafo:



Numerando i vertici come indicato qui sotto, si ottiene una colorazione che utilizza 4 colori (i colori sono scritti a fianco dei vertici):



Se invece numeriamo i vertici come indicato nella figura seguente e applichiamo lo stesso algoritmo di colorazione, si ottiene una colorazione che necessita di 5 colori:



In ogni caso è facile convincersi che non si useranno mai più di $\Delta(G) + 1$ colori (ove $\Delta(G)$ è il grado massimo di G). Infatti, percorrendo la lista dei vertici, quando si arriva a un vertice v il cui grado è pari a $\Delta(G)$, nella peggiore delle ipotesi a tutti i $\Delta(G)$ vertici adiacenti a v sarà stato assegnato in precedenza un colore distinto; in tal caso avremo bisogno di un ulteriore colore, diverso da tutti i precedenti, per colorare il vertice v . Ciò fornisce, per l'appunto, un totale di $\Delta(G) + 1$ colori. In effetti, è facile dimostrare che, se il grafo G è completo, oppure se G è un ciclo con un numero dispari di lati, questo è il meglio che si possa fare.

PROPOSIZIONE 3.3. *Se $G = K^n$, o se G è un ciclo dispari, allora $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $G = K^n$, si ha $\chi(G) = n$ e $\Delta(G) = n - 1$. Se invece G è un ciclo con un numero dispari di lati, si ha $\chi(G) = 3$ e $\Delta(G) = 2$. In entrambi i casi l'asserzione è verificata. \square

In realtà, il caso dei grafi completi o dei cicli dispari è l'unico in cui il limite $\Delta(G) + 1$ per il numero cromatico viene raggiunto. Infatti si ha il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione:

TEOREMA 3.4 (Brooks, 1941). *Sia G un grafo connesso. Se G non è completo e neppure un ciclo dispari allora si ha*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

In generale (tranne naturalmente nei casi estremi appena visti) il limite superiore $\Delta(G)+1$ per il numero di colori utilizzati dall'algoritmo "avaro" è, in effetti, abbastanza generoso. Infatti, dalla descrizione dell'algoritmo, è chiaro che quando si cerca quale colore attribuire all' i -esimo vertice v_i , non bisogna considerare tutti i vertici v_j adiacenti a v_i , ma solo quelli per cui è $j < i$, cioè solo quelli a cui è già stato assegnato un colore. Da questa semplice osservazione si deduce che, al fine di ridurre il numero di colori utilizzati, è conveniente numerare i vertici di V mettendo per primi quelli di grado più alto, e lasciando per ultimi quelli di grado più basso. In questo modo infatti, più si avanza nella lista dei vertici, cioè più sono i vertici a cui è già stato assegnato un colore, meno confronti si devono fare per scegliere il colore del prossimo vertice.

Si può quindi migliorare l'algoritmo di colorazione precedente numerando i vertici nel modo seguente: si scelga come v_n un vertice di grado minimo in G , si scelga poi come v_{n-1} un vertice di grado minimo in $G - \{v_n\}$, e, in generale, come v_i si sceglierà un vertice di grado minimo in $G - \{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n\}$, per ogni $i < n$.

Introduciamo ora un nuovo numero, detto *numero di colorazione*, legato all'algoritmo appena descritto.

DEFINIZIONE 3.5. Il *numero di colorazione* di un grafo G , indicato con $\text{col}(G)$, è il più piccolo intero k tale che esista una numerazione dei vertici di G rispetto alla quale ogni vertice è preceduto da meno di k dei suoi vicini.

OSSERVAZIONE 3.6. In base a quanto appena visto, il numero di colorazione di G è il più piccolo numero di colori necessari a colorare i vertici di G utilizzando l'algoritmo "avaro" (provando quindi tutte le possibili numerazioni dei vertici di G e scegliendo la migliore possibile).

Ovviamente si ha $\chi(G) \leq \text{col}(G)$. Utilizzando l'algoritmo "avaro" con la numerazione descritta in precedenza si ottiene la stima seguente:

$$\text{col}(G) \leq \max_{H \subseteq G} \{\delta(H)\} + 1,$$

ove il massimo è calcolato su tutti i sottografi H di G .

Osserviamo che, se $H \subseteq G$, allora è $\text{col}(H) \leq \text{col}(G)$. Inoltre, per ogni grafo H , è anche $\text{col}(H) \geq \delta(H) + 1$, perché, in una qualunque numerazione dei vertici di H , il numero dei vertici adiacenti all'ultimo vertice è uguale al grado dell'ultimo vertice, ed è quindi $\geq \delta(H)$, quindi per colorare H servono almeno $\delta(H) + 1$ colori.

Si ha quindi:

$$\max_{H \subseteq G} \{\delta(H)\} + 1 \leq \max_{H \subseteq G} \{\text{col}(H)\} \leq \text{col}(G),$$

che, assieme alla disuguaglianza precedente, permette di concludere che

$$\text{col}(G) = \max_{H \subseteq G} \{\delta(H)\} + 1.$$

Abbiamo così dimostrato il seguente risultato:

TEOREMA 3.7. *Per ogni grafo G , si ha:*

$$\chi(G) \leq \text{col}(G) = \max_{H \subseteq G} \{\delta(H)\} + 1.$$

COROLLARIO 3.8. *Ogni grafo G ha un sottografo il cui grado minimo è almeno pari a $\chi(G) - 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \bar{H} un sottografo di G che soddisfa

$$\delta(\bar{H}) = \max_{H \subseteq G} \{\delta(H)\}.$$

Allora si ha $\chi(G) \leq \delta(\bar{H}) + 1$, cioè $\delta(\bar{H}) \geq \chi(G) - 1$. □

Terminiamo questa sezione con alcune osservazioni sulla struttura dei grafi con elevato numero cromatico. Ci possiamo infatti chiedere che cosa, in un grafo, determini un elevato numero cromatico. Esiste forse un qualche tipo di struttura canonica responsabile di questo fatto? Certamente se G contiene un sottografo isomorfo a K^n allora sarà necessariamente $\chi(G) \geq n$. Vale forse una qualche sorta di “viceversa” di questa affermazione? Più precisamente, il fatto che un grafo abbia un elevato numero cromatico è dovuto alla presenza di un qualche tipo di sottografo altamente connesso?

In riferimento a questo tipo di domande citiamo un classico teorema, dovuto a Erdős, e dimostrato con metodi probabilistici.

TEOREMA 3.9. *Esistono grafi con numero cromatico arbitrariamente elevato e, al tempo stesso, con una circonferenza minima arbitrariamente elevata.*

Una conseguenza di questo teorema è la seguente:

COROLLARIO 3.10. *Per ogni grafo H che non sia una foresta, e per ogni intero positivo k , esiste un grafo G con $\chi(G) \geq k$ e $H \not\subseteq G$.*

DIMOSTRAZIONE. Dato H , indichiamo con c la sua circonferenza minima. In base al teorema precedente esiste un grafo G con $\chi(G) \geq k$ e con circonferenza minima $> c$. Un tale G non può quindi contenere un sottografo isomorfo a H , perché altrimenti dovrebbe avere una circonferenza minima minore o uguale a quella di H . □

Ciò significa dunque che un grafo G con elevato numero cromatico non deve necessariamente contenere alcun sottografo di tipo particolare. In altre parole, il fatto che $\chi(G) \gg 0$ non può essere sempre attribuito alla presenza di un qualche tipo di struttura locale in G , ma deve essere una proprietà globale di G . Si noti infine che un grafo G con una circonferenza minima molto elevata si presenta, localmente,

come un albero (è pur vero che esistono dei cicli in G , ma questi sono estremamente lunghi), e quindi è localmente 2-colorabile!