Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA — Gruppo 4

Prof. F. Bottacin

Prima prova in itinere — 28 novembre 2005

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è divisibile per } 3\}, \qquad B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide } 18\}.$$

(a) Si descrivano in modo esplicito (elencandone gli elementi) gli insiemi A e B.
(b) Si descrivano in modo esplicito (elencandone gli elementi) gli insiemi $A \cap B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$.
(c) Quante sono le funzioni iniettive da A in B?
(d) Quante sono le funzioni iniettive da B in A?
(e) Quante sono le funzioni biiettive da B in B?
(f) Quanti elementi ha l'insieme delle parti di B? (*tutte le risposte devono essere motivate*).

Soluzione.
(a) $A = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\} = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $\qquad B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.
(b) $A \cap B = \{3, 6, 9, 18\}$, $\qquad B \setminus A = \{1, 2\}$, $\qquad A \triangle B = \{0, 1, 2, 12, 15, 21, 24, 27, \dots\}$.
(c) nessuna.
(d) infinite.
(e) $6! = 720$.
(f) $2^6 = 64$.

Esercizio 2. Sia $f : A \to B$ una funzione. Si dimostri che, se f è iniettiva, si ha

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y),$$

per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A. Si fornisca un esempio per mostrare che, se f non è iniettiva, la precedente uguaglianza potrebbe non essere vera.

Esercizio 3. Per ciascuna delle seguenti corrispondenze tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ si stabilisca se essa è una funzione (*tutte le risposte devono essere motivate*):
(a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \mid x^2 = 2y\}$.
(b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \mid 3x = y^2\}$.
(c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \mid x^2 = y^2\}$.
(d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \mid 2x = |3y|\}$.
(e) $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \mid \frac{y}{x} \in \mathbb{Q}\}$.

Soluzione.
(a) Sì.
(b) No (per $x = 1$ non c'è alcun y tale che $(1, y) \in R_2$).
(c) No (perché $(2, 2), (2, -2) \in R_3$).
(d) No (perché $(3, 2), (3, -2) \in R_4$).
(e) No (per $x = 0$ non c'è alcun y tale che $(0, y) \in R_5$ mentre per $x \neq 0$ ci sono infiniti y tali che $(0, y) \in R_5$).

Esercizio 4.
(a) Quanti sono gli anagrammi (non necessariamente di senso compiuto) della parola "LIBRO"?
(b) Quanti sono gli anagrammi (non necessariamente di senso compiuto) della parola "MATEMATICA"?
(c) Dato un alfabeto composto da 26 simboli, quante parole (cioè sequenze di simboli) di lunghezza compresa tra 1 e 5 (inclusi) si possono formare?
(d) Quante sono le funzioni iniettive da un insieme di 3 elementi in un insieme di 10 elementi?
(e) Quanti sono i sottoinsiemi di cardinalità 4 di un insieme contenente 15 elementi?

Soluzione.
(a) $5! = 120$.
(b) $\dfrac{10!}{2!\,3!\,2!} = 151200$.
(c) $26 + 26^2 + 26^3 + 26^4 + 26^5 = 12356630$.
(d) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.
(e) $\binom{15}{4} = 1365$.

Esercizio 5. Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$, con $c \neq 0$. Sia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ la funzione data da

$$f(x) = \frac{ax + b}{c}.$$

Si dica per quali valori di a, b e c la funzione f è invertibile, e si determini la sua inversa.

Soluzione. f è invertibile se e solo se $a \neq 0$ e si ha

$$f^{-1}(y) = \frac{cy - b}{a}.$$

Esercizio 6. Sia $N = 243_6$ (cioè N è il numero espresso da 243 in base 6). Si scriva N in base 8.

Soluzione. Si ha: $243_6 = 99_{10} = 143_8$.

Esercizio 7. Si determini il quoziente q e il resto r delle seguenti divisioni tra numeri interi:
(a) 8 diviso 12.
(b) -17 diviso 5.
(c) 13 diviso -4.
(d) -10 diviso -7.

Soluzione.
(a) $q = 0$, $r = 8$.
(b) $q = -4$, $r = 3$.
(c) $q = -3$, $r = 1$.
(d) $q = 2$, $r = 4$.

Esercizio 8. Si calcoli il massimo comun divisore positivo d di $a = 3575$ e $b = 315$, utilizzando l'algoritmo di Euclide. Si determinino inoltre due interi α e β tale che $a\,\alpha + b\,\beta = d$.

Soluzione. $d = 5$, $\alpha = -20$, $\beta = 227$.

Esercizio 9. Si dimostri per induzione che, per ogni intero $n \geq 1$, si ha

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Esercizio 10. In $\mathbb{Z}$ si consideri la relazione $\sim$ definita come segue:

$$x \sim y \text{ se } 3x - y \text{ è pari.}$$

(a) Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
(b) Si descrivano le classi di equivalenza degli elementi 1 e 2.
(c) Si descriva l'insieme quoziente $A/\!\sim$.

Soluzione.
(b) $[1] = \{$ numeri interi dispari $\}$, $\qquad [2] = \{$ numeri interi pari $\}$.
(c) $A/\!\sim\, = \{\, [0], [1] \,\}$.

Esercizio 11. In $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ si consideri la relazione $\bowtie$ definita ponendo

$$x \bowtie y \text{ se } x \text{ divide } y.$$

Si dica se la relazione $\bowtie$ è:
(a) riflessiva;
(b) simmetrica;
(c) antisimmetrica;
(d) transitiva.

Soluzione.
(a) Sì;
(b) No;
(c) No;
(d) Sì.