Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola __________

MATEMATICA DISCRETA — Gruppo 4

PROF. F. BOTTACIN

Primo appello — 9 febbraio 2006

Esercizio 1. Siano A, B e C tre insiemi. Si dimostri che

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti corrispondenze tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ si stabilisca se essa è una funzione (*tutte le risposte devono essere motivate*):
(a) $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid y = 3 \text{ se } x \text{ è pari, } y = -2 \text{ se } x \text{ è dispari}\}$.
(b) $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid |x| = -3y\}$.
(c) $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid 2x = |3y|\}$.
(d) $R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid x^2 = y^3\}$.
(e) $R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid xy \in \mathbb{Z}\}$.

Soluzione.
(a) Sì.
(b) Sì.
(c) No (se $x < 0$ non esiste alcun y tale che $(x,y) \in R_3$).
(d) No (in $\mathbb{Q}$ non esistono le radici cubiche).
(e) No (per un dato x esistono infiniti y tali che $(x,y) \in R_5$).

Esercizio 3. Si considerino le funzioni $f : \mathbb{Z} \setminus \{2\} \to \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ e $g : \mathbb{Z} \setminus \{1\} \to \mathbb{Q}$ definite ponendo

$$f(x) = 2x - 3, \qquad g(y) = \frac{2y+1}{y-1}.$$

(a) Si calcoli la funzione composta $(g \circ f)(x)$.
(b) Si stabilisca se la funzione composta $g \circ f$ è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
(c) Si calcoli $(g \circ f)^{-1}\big(\{1/2, 1/3, 1/4\}\big)$.
(d) Si calcoli $(g \circ f)\big(\{1, 3, 5\}\big)$.

Soluzione.
(a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{4x-5}{2x-4}$.
(b) $g \circ f$ è iniettiva, non è suriettiva, non è biiettiva.
(c) $(g \circ f)^{-1}\big(\{1/2, 1/3, 1/4\}\big) = \{1\}$.
(d) $(g \circ f)\big(\{1, 3, 5\}\big) = \{1/2, 5/2, 7/2\}$.

Esercizio 4. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni e sia $g \circ f : A \to C$ la funzione composta. Si dimostri che:
(a) $g \circ f$ iniettiva $\Longrightarrow$ f iniettiva.
(b) $g \circ f$ suriettiva $\Longrightarrow$ g suriettiva.
(c) Si dia un esempio di funzioni f e g tali che g non sia iniettiva ma $g \circ f$ sia iniettiva.
(d) Si dia un esempio di funzioni f e g tali che f non sia suriettiva ma $g \circ f$ sia suriettiva.

Esercizio 5. Si calcoli il massimo comun divisore positivo d di $a = 3422$ e $b = 248$, utilizzando l'algoritmo di Euclide. Si determinino inoltre due interi α e β tali che $d = a\,\alpha + b\,\beta$.

Soluzione. $d = 2$, $\alpha = -5$, $\beta = 69$.

Esercizio 6. Si determinino tutti gli interi x, con $0 \leq x \leq 100$, che siano soluzioni del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7 \\ 5x \equiv 10 \pmod{20} \\ x \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

Soluzione. $x_1 = 10$ e $x_2 = 94$.

Esercizio 7. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (il simbolo $[n]$ indica la classe di equivalenza di n modulo 5).

$$\begin{cases} [2]x + [3]y + [4]z = [1] \\ x + [2]z = [1] \\ [2]y + z = [2] \end{cases}$$

Soluzione. $x = [4]$, $y = [3]$, $z = [1]$.

Esercizio 8. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} [3] & [2] & [1] \\ [5] & [1] & [3] \\ [4] & [5] & [2] \end{pmatrix}$$

a coefficienti in $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Si stabilisca se la matrice A è invertibile (sempre in $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$).

Soluzione. Si ha $\det A = [6]$, che non è invertibile in $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Quindi A non è invertibile.

Esercizio 9. Nell'insieme $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \in \mathbb{N}_p,$$

ove $\mathbb{N}_p = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ è l'insieme dei numeri naturali pari.
(a) Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine.
(b) Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \sqsubseteq)$.
(c) Si determinino gli eventuali elementi minimali e il minimo di $(A, \sqsubseteq)$.
(d) Si determinino gli eventuali elementi massimali e il massimo di $(A, \sqsubseteq)$.
(e) Si stabilisca se l'insieme $(A, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato.
(f) Si determini, se esiste, l'estremo inferiore del sottoinsieme $\{3, 8\}$ di $(A, \sqsubseteq)$.
(g) Si determini, se esiste, l'estremo superiore del sottoinsieme $\{3, 7\}$ di $(A, \sqsubseteq)$.

Soluzione.
(c) Gli elementi minimali di $(A, \sqsubseteq)$ sono 9 e 10. Il minimo non esiste.
(d) Gli elementi massimali di $(A, \sqsubseteq)$ sono 0 e 1. Il massimo non esiste.
(e) L'insieme $(A, \sqsubseteq)$ non è totalmente ordinato: ad esempio gli elementi 2 e 5 non sono confrontabili.
(f) Non esiste l'estremo inferiore del sottoinsieme $\{3, 8\}$.
(g) L'estremo superiore del sottoinsieme $\{3, 7\}$ è 3.

Esercizio 10. Nel prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si definisca una operazione binaria $*$ ponendo

$$(a, b) * (a', b') = (aa', ab' + b).$$

(a) Si dimostri che $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *)$ è un monoide non-commutativo.
(b) Si determinino gli elementi invertibili di $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *)$. Se (a, b) è invertibile, chi è il suo inverso?
(c) Si dimostri che $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\pi : (a, b) \mapsto a$, è un omomorfismo suriettivo del monoide $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *)$ sul monoide $(\mathbb{R}, \cdot)$.

Soluzione.
(b) Un elemento (a, b) è invertibile se e solo se $a \neq 0$. L'inverso di (a, b) è l'elemento $(1/a, -b/a)$.
(c) π è ovviamente suriettiva. Basta verificare che $\pi((a, b) * (a', b')) = \pi(a, b) \cdot \pi(a', b')$.