Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA — Gruppo 4

Prof. F. Bottacin

Seconda prova in itinere — 9 febbraio 2006

Esercizio 1. In $\mathbb{Z}/5364\mathbb{Z}$, dotato della operazione di prodotto, si stabilisca se l'elemento $[137]$ è invertibile. In caso affermativo se ne determini l'inverso.

Soluzione. $[137]$ è invertibile perché $\mathrm{MCD}(137, 5364) = 1$. Il suo inverso è $[509]$, infatti $[137] \cdot [509] = [1]$ in $\mathbb{Z}/5364\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Si determinino tutti gli interi x, con $0 \le x \le 100$, che siano soluzioni del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{7} \\ 5x \equiv 10 \pmod{20} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

Soluzione. $x_1 = 10$ e $x_2 = 94$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} [3] & [2] & [1] \\ [5] & [1] & [3] \\ [4] & [5] & [2] \end{pmatrix}$$

a coefficienti in $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Si stabilisca se la matrice A è invertibile (sempre in $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$).

Soluzione. Si ha $\det A = [6]$, che non è invertibile in $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Quindi A non è invertibile.

Esercizio 4. Nell'anello delle matrici quadrate di ordine 2, a coefficienti in $\mathbb{Z}$, si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Si stabilisca se le matrici A e B sono invertibili.
(b) Si calcolino le matrici inverse di A e B, se queste esistono.

Soluzione.
(a) A è invertibile, B non è invertibile.
(b) Si ha

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (il simbolo $[n]$ indica la classe di equivalenza di n modulo 5).

$$\begin{cases} [2]x + [3]y + [4]z = [1] \\ x + [2]z = [1] \\ [2]y + z = [2] \end{cases}$$

Soluzione. $x = [4]$, $y = [3]$, $z = [1]$.

Esercizio 6. Nell'insieme $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \in \mathbb{N}_p,$$

ove $\mathbb{N}_p = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ è l'insieme dei numeri naturali pari.
(a) Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine.
(b) Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \sqsubseteq)$.
(c) Si determinino gli eventuali elementi minimali e il minimo di $(A, \sqsubseteq)$.
(d) Si determinino gli eventuali elementi massimali e il massimo di $(A, \sqsubseteq)$.
(e) Si stabilisca se l'insieme $(A, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato.
(f) Si determini, se esiste, l'estremo inferiore del sottoinsieme $\{3, 8\}$ di $(A, \sqsubseteq)$.
(g) Si determini, se esiste, l'estremo superiore del sottoinsieme $\{3, 7\}$ di $(A, \sqsubseteq)$.

Soluzione.
(c) Gli elementi minimali di $(A, \sqsubseteq)$ sono 9 e 10. Il minimo non esiste.
(d) Gli elementi massimali di $(A, \sqsubseteq)$ sono 0 e 1. Il massimo non esiste.
(e) L'insieme $(A, \sqsubseteq)$ non è totalmente ordinato: ad esempio gli elementi 2 e 5 non sono confrontabili.
(f) Non esiste l'estremo inferiore del sottoinsieme $\{3, 8\}$.
(g) L'estremo superiore del sottoinsieme $\{3, 7\}$ è 3.

Esercizio 7. Sia $(G, \cdot)$ il gruppo degli elementi invertibili di $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \cdot)$.
(a) Si elenchino gli elementi di G.
(b) Si scriva la tabella moltiplicativa di $(G, \cdot)$.
(c) Si stabilisca se G è un sottoinsieme stabile di $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.
(d) Si dimostri che la funzione $f : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \to (G, \cdot)$ definita ponendo $f([0]) = [1]$ e $f([1]) = [5]$ è un omomorfismo di gruppi.

Soluzione.
(a) $G = \{[1], [5], [7], [11]\}$.
(c) No, non è sottoinsieme stabile. Infatti $[1], [5] \in G$, ma $[1] + [5] = [6] \notin G$.
(d) Basta controllare che $f([0] + [0]) = [1] \cdot [1]$, $f([0] + [1]) = [1] \cdot [5]$, e che $f([1] + [1]) = [5] \cdot [5]$.

Esercizio 8. Nel prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si definisca una operazione binaria $*$ ponendo

$$(a, b) * (a', b') = (aa', ab' + b).$$

(a) Si dimostri che $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *)$ è un monoide non-commutativo.
(b) Si determinino gli elementi invertibili di $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *)$. Se (a, b) è invertibile, chi è il suo inverso?
(c) Si dimostri che $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\pi : (a, b) \mapsto a$, è un omomorfismo suriettivo del monoide $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *)$ sul monoide $(\mathbb{R}, \cdot)$.

Soluzione.
(b) Un elemento (a, b) è invertibile se e solo se $a \neq 0$. L'inverso di (a, b) è l'elemento $(1/a, -b/a)$.
(c) π è ovviamente suriettiva. Basta verificare che $\pi((a, b) * (a', b')) = \pi(a, b) \cdot \pi(a', b')$.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri (per induzione su n) che

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

per ogni intero positivo n.

Esercizio 10. Si determinino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Un autovettore associato a $\lambda_1 = 1$ è $v_1 = (2, 1)$. Un autovettore associato a $\lambda_2 = 2$ è $v_2 = (5, 3)$.