Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA — Gruppo 4

Prof. F. Bottacin

Secondo appello — 27 febbraio 2006

Esercizio 1. Si dimostri che, dati tre insiemi qualsiasi A, B e C, si ha:
(a) se $B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ allora $A = \emptyset$.
(b) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

Esercizio 2. Siano A e B due insiemi e sia $f : A \to B$ una funzione. Sia $B' \subseteq B$. Si dimostri che

$$f(f^{-1}(B')) = B' \cap f(A).$$

Esercizio 3. Si dimostri, per induzione su n, che si ha

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 4. Si considerino gli insiemi $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, con $m, n \geq 2$. Per ogni $a \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[a]_m$ e $[a]_n$ le classi di a in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ rispettivamente. Vogliamo definire una funzione $f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ponendo $f([a]_m) = [a]_n$.
(a) Si stabilisca se è possibile definire la funzione f di cui sopra per ogni valore di m e n, oppure se è necessario che m e n soddisfino un qualche tipo di relazione.
(b) Per tutti i valori di m e n per i quali f risulta ben definita, si stabilisca in quali casi f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
(c) Per tutti i valori di m e n per i quali f risulta ben definita, si dimostri che f è un omomorfismo di anelli.

Soluzione. (a) f è ben definita se e solo se n divide m (cioè m è multiplo di n).
(b) f è sempre suriettiva (quando è definita); essa è iniettiva, e quindi biiettiva, se e solo se $m = n$.

Esercizio 5. Sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali si definisca una relazione $\sim$ ponendo

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z}.$$

(a) Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
(b) Chi è l'insieme quoziente $\mathbb{R}/\sim$?
(c) Si stabilisca se la relazione di equivalenza $\sim$ è compatibile con le operazioni di somma e prodotto usuali di $\mathbb{R}$.

Soluzione. (b) $\mathbb{R}/\sim \; \cong [0, 1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$.
(c) La relazione di equivalenza $\sim$ è compatibile con l'operazione di somma, ma non con quella di prodotto.

Esercizio 6. Nel prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si definisca una relazione $\sqsubseteq$ ponendo

$$(a, b) \sqsubseteq (a', b') \quad \Leftrightarrow \quad 2^a\, 3^b \leq 2^{a'}\, 3^{b'}.$$

(a) Si dimostri che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine.
(b) Si stabilisca se $\sqsubseteq$ è un ordine totale.
(c) Si consideri l'insieme $A = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 2), (2, 0), (1, 2), (2, 1)\}$. Si determinino, se esistono, il minimo e il massimo di A.

Soluzione. (b) Si tratta di un ordine totale.
(c) A ammette minimo e massimo. Il minimo di A è $(1,0)$, il massimo è $(1,2)$.

Esercizio 7. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} [3] & [5] \\ [2] & [7] \end{pmatrix}$$

a coefficienti in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Si stabilisca se A è invertibile e, in caso affermativo, si determini la sua inversa (naturalmente in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$).

Soluzione. Si ha $\det(A) = [11] = [2]$, che è invertibile in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, dato che 2 e 9 sono coprimi. Quindi A è invertibile e la sua inversa è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} [8] & [2] \\ [8] & [6] \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Si risolva (se possibile) col metodo di Cramer il seguente sistema di equazioni lineari in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} x + y + z = [3] \\ [2]y - [3]z = [1] \\ [3]x + z = [2] \end{cases}$$

Soluzione. Il sistema è risolubile e la soluzione è

$$\begin{cases} x = [1] \\ y = [3] \\ z = [7] \end{cases}$$

Esercizio 9. Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod 5 \\ 3x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$$

Soluzione. Le soluzioni sono date da $x = 3 + 35t$, per ogni $t \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 10. Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Gli autovalori sono $\lambda = 1$, con autovettore $v_1 = (3,5)$, e $\lambda = 2$, con autovettore $v_2 = (1,2)$.