Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA — Gruppo 4

Prof. F. Bottacin

Appello — 27 aprile 2006

Esercizio 1. Siano A e B due insiemi e $f : A \to B$ una funzione.
(a) Si dimostri che, per ogni $R, S \subset A$, si ha

$$f(R) \setminus f(S) \subset f(R \setminus S).$$

(b) Si dimostri che, per ogni $X, Y \subset B$, si ha

$$f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \setminus Y).$$

Esercizio 2. Si scriva l'espressione del numero $(5241)_7$ in base 5.

Soluzione. $(5241)_7 = (1842)_{10} = (24332)_5$.

Esercizio 3. Ad una festa ci sono m ragazzi e n ragazze.
(a) Se ogni persona (indipendentemente dal sesso) stringe la mano una e una sola volta a ogni altra persona, quante strette di mano avvengono?
(b) Se invece ogni persona stringe la mano una e una sola volta solamente alle persone del sesso opposto, quante strette di mano avvengono?
(c) Se alla festa ci sono esattamente $m + n$ sedie, in quante configurazioni diverse si possono sedere i partecipanti alla festa?
(d) Se alla festa ci sono esattamente m sedie nere e n sedie bianche, in quante configurazioni diverse si possono sedere i partecipanti alla festa, sapendo che i ragazzi si possono sedere solo sulle sedie nere e le ragazze solo su quelle bianche?
(e) In quanti modi diversi si possono formare delle coppie del tipo (ragazzo, ragazza)?

Soluzione.
(a) Ci sono $\binom{m+n}{2}$ strette di mano.
(b) Ci sono mn strette di mano.
(c) In $(m + n)!$ configurazioni diverse.
(d) In $m!\,n!$ configurazioni diverse.
(e) Se $m \geq n$, in $m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdots(m-n+1)$ modi diversi, altrimenti in $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)$ modi.

Esercizio 4. Sia $M = M_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino gli elementi dell'insieme

$$C_A = \{B \in M \mid AB = BA\}.$$

(b) Si dimostri che l'insieme C_A è chiuso per le operazioni di somma e prodotto di matrici.
(c) Si dimostri che se una matrice $B \in C_A$ è invertibile, allora anche $B^{-1} \in C_A$.
(d) Si determini la cardinalità (cioè il numero di elementi) dell'insieme C_A.

Soluzione.

(a) Gli elementi di C_A sono del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

(b)

$$A\,(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = B_1A + B_2A = (B_1 + B_2)\,A$$

$$A\,(B_1B_2) = (AB_1)\,B_2 = (B_1A)\,B_2 = B_1\,(AB_2) = B_1\,(B_2A) = (B_1B_2)\,A.$$

(c) $AB = BA \Rightarrow B^{-1}AB = A \Rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}$.

(d) L'insieme C_A ha $5^2 = 25$ elementi.

Esercizio 5. Nell'insieme $A = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid b \neq 0\}$ si definisca una relazione $\sim$ ponendo

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ se } ad - bc = 0.$$

(a) Si verifichi che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

(b) Si definisca una operazione di somma ponendo $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$. Questa operazione è compatibile con la relazione di equivalenza $\sim$?

(c) Si definisca una operazione di prodotto ponendo $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$. Questa operazione è compatibile con la relazione di equivalenza $\sim$?

Soluzione.

(b) Sì.

(c) Sì.

Esercizio 6. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri, per induzione su n, che si ha

$$A^{n+1} = A^{n-1} - A^n,$$

per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 7. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & x & 3 \end{pmatrix}$$

a coefficienti nell'anello $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Per quale valore di x la matrice A ha rango 2?

Soluzione. Per $x = 2$.

Esercizio 8. Si determinino tutti i numeri interi x, con $-100 < x < 100$, che sono soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x \equiv 2 \bmod 7 \\ 2x \equiv 1 \bmod 3 \\ 3x \equiv 2 \bmod 5 \end{cases}$$

Soluzione. Le soluzioni sono $x_1 = -61$ e $x_2 = 44$.

Esercizio 9. In $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ si risolva (con il metodo di Cramer) il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 3x + z = 2 \\ 5x + y = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

Soluzione. La soluzione è

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \\ z = 5 \end{cases}$$

Esercizio 10. In $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ si determinino tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Soluzione. Le soluzioni sono

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$$