Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola __________

MATEMATICA DISCRETA — Gruppo 4

Prof. F. Bottacin

Appello — 19 luglio 2006

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita ponendo $f(n) = n/2$, se n è pari, $f(n) = -(n+1)/2$, se n è dispari. Sia poi $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $g(m) = 1 - 3m$.
(a) Si stabilisca se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
(b) Si stabilisca se g è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
(c) Si calcoli $f(\{2, 5, 6, 9\})$.
(d) Si calcoli $f^{-1}(\{-1, 0, 1\})$.
(e) Si stabilisca se la funzione composta $g \circ f$ è invertibile, e si calcoli $(g \circ f)^{-1}(2)$.

Soluzione. (a) f è biiettiva.
(b) g è solo iniettiva.
(c) $f(\{2, 5, 6, 9\}) = \{1, -3, 3, -5\}$.
(d) $f^{-1}(\{-1, 0, 1\}) = \{1, 0, 2\}$.
(e) La funzione composta non è invertibile (perché g non lo è) e $(g \circ f)^{-1}(2) = \emptyset$.

Esercizio 2. Si dica quali delle seguenti corrispondenze sono delle funzioni (*tutte le risposte devono essere motivate*):
(a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid 2x^2 = 3y^2\}$.
(b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid |x| - y = -1\}$.
(c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + |y| + 1 = 0\}$.
(d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid x^4 - 3y + 2 = 0\}$.
(e) $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \mid x = n/m, \mathrm{MCD}(n, m) = 1, m > 0, y = n\}$.

Soluzione.
(a) No.
(b) Sì.
(c) No.
(d) Sì.
(e) Sì.

Esercizio 3. A una gara partecipano 10 cavalli e 10 fantini, entrambi numerati da 1 a 10.
(a) Se l'abbinamento cavallo-fantino avviene in modo casuale (tramite estrazione a sorte), quanti possibili abbinamenti ci sono?
(b) Se invece vale la regola che un fantino con un numero dispari può solo essere abbinato con un cavallo con numero pari, quanti possibili abbinamenti ci sono?
(c) Quanti sono i possibili abbinamenti se si richiede che la somma dei numeri del cavallo e del fantino sia ≥ 10?
(d) Quanti sono i possibili ordini di arrivo dei cavalli al traguardo? (si suppone che non ci possano essere arrivi contemporanei).
(*Tutte le risposte devono essere motivate.*)

Soluzione. (a) $10! = 3628800$
(b) $(5!)^2 = 14400$
(c) $2^9 = 512$
(d) $10! = 3628800$

Esercizio 4. Nel prodotto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si definisca una operazione $\star$ ponendo

$$(a, b) \star (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

(a) Si dimostri che $\star$ è una operazione associativa e commutativa.
(b) Si determini se esiste un elemento neutro.
(c) Quali sono gli elementi invertibili di $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$?

Soluzione. (b) L'elemento neutro è $(1, 0)$.
(c) Gli elementi invertibili sono $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

Esercizio 5. Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali definiamo la seguente relazione:

$$a \sim b \text{ se esiste } n \in \mathbb{Z} \text{ tale che } a = b + n.$$

(a) Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
(b) Si stabilisca se la relazione $\sim$ è compatibile con l'operazione di somma di $\mathbb{Q}$.
(c) Si stabilisca se la relazione $\sim$ è compatibile con l'operazione di prodotto di $\mathbb{Q}$.
(d) Sia $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\sim$ l'applicazione che a un elemento $x \in \mathbb{Q}$ associa la sua classe di equivalenza $[x] \in \mathbb{Q}/\sim$. Si descriva l'immagine $\pi(\mathbb{Z})$ del sottoinsieme $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Soluzione. (b) Sì, la relazione $\sim$ è compatibile con l'operazione di somma di $\mathbb{Q}$.
(c) No, la relazione $\sim$ non è compatibile con l'operazione di prodotto di $\mathbb{Q}$.
(d) $\pi(\mathbb{Z}) = \{[0]\}$.

Esercizio 6. Sia $A = \{1, 2, 3\}$ e sia X l'insieme delle parti di A. Sull'insieme X definiamo una relazione $\preceq$ ponendo

$$x \preceq y \text{ se } x \supseteq y, \text{ per ogni } x, y \in X.$$

(a) Si dimostri che $\preceq$ è una relazione d'ordine.
(b) L'insieme $(X, \preceq)$ è totalmente ordinato?
(c) L'insieme $(X, \preceq)$ è bene ordinato?
(d) Si disegni il diagramma di Hasse di $(X, \preceq)$.
(e) Chi sono il minimo e il massimo di X (se esistono)?
(f) Determinare i minoranti di $\{2\}$.

Soluzione. (b) $(X, \preceq)$ non è totalmente ordinato.
(c) $(X, \preceq)$ non è bene ordinato.
(e) Il minimo di X è $\{1, 2, 3\}$. Il massimo di X è $\emptyset$.
(f) I minoranti di $\{2\}$ sono: $\{2\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ e $\{1, 2, 3\}$.

Esercizio 7. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \bmod 5 \\ 2x \equiv 3 \bmod 7 \\ 2x \equiv 1 \bmod 3 \end{cases}$$

Soluzione. Le soluzioni sono $x = 89 + 105\ell$, per ogni $\ell \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 8. Si determini se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 79 & 31 \\ 52 & 142 \end{pmatrix}$$

è invertibile in $\mathbb{Z}/3433\mathbb{Z}$.

Soluzione. Si ha $\det A = 9606 \equiv 2740 \bmod 3433$. Dato che $\mathrm{MCD}(2740, 3433) = 1$, il determinante di A è invertibile e quindi anche la matrice A è invertibile.

Esercizio 9. Per ogni intero $n \geq 1$ poniamo $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i$. Si dimostri che

$$S(n) + S(n+1) = (n+1)^2.$$

Esercizio 10. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si dica se A è invertibile e si determinino gli autovalori e gli autovettori di A.

Soluzione. Si ha $\det A = 0$, quindi A non è invertibile. Gli autovalori sono $\lambda = 1$ (con molteplicità 2) e $\lambda = 0$. Un autovettore corrispondente a $\lambda = 0$ è il vettore $(1, 1, 0)$. Due autovettori corrispondenti a $\lambda = 1$ sono i vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$.