Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA — Gruppo 4

Prof. F. Bottacin

Appello — 28 settembre 2006

Esercizio 1. Siano $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme con n elementi e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ un insieme con m elementi.
(a) Si dimostri che se $n \leq m$ esiste una funzione iniettiva $f : A \to B$.
(b) Si dimostri che se esiste una funzione iniettiva $f : A \to B$ allora $n \leq m$.
(c) Si dimostri che se $n \geq m$ esiste una funzione suriettiva $f : A \to B$.
(d) Si dimostri che se esiste una funzione suriettiva $f : A \to B$ allora $n \geq m$.
(e) Si dimostri che se $n = m$ allora ogni $f : A \to B$ iniettiva è anche suriettiva.

Esercizio 2.
(a) Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 nella forma $(*\,4\,3 * *\,1)_7$?
(b) Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 nella forma $(2 * 5 * * 3)_7$ con cifre tutte distinte?
(c) Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 nella forma $(5 * 1 * * 3)_7$ con cifre tutte dispari?
(d) Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 utilizzando esattamente le cifre del numero $(2\,6\,4\,1\,3)_7$?
(e) Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 utilizzando esattamente le cifre del numero $(2\,3\,3\,2\,3)_7$?
(f) Si rappresenti in base 7 il numero 2154.

Soluzione. (a) $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$.
(b) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.
(c) $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.
(d) $5! = 120$.
(e) $\frac{5!}{2!\,3!} = 10$.
(f) $(2154)_{10} = (6165)_7$.

Esercizio 3. Si determini il quoziente q e il resto r delle seguenti divisioni tra numeri interi:
(a) 8 diviso 12.
(b) -17 diviso 5.
(c) 13 diviso -4.
(d) -10 diviso -7.

Soluzione.
(a) $q = 0$, $r = 8$.
(b) $q = -4$, $r = 3$.
(c) $q = -3$, $r = 1$.
(d) $q = 2$, $r = 4$.

Esercizio 4. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Si dimostri che, per ogni $n \geq 1$, si ha
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \alpha(n) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $\alpha(n) = n\,(n+1)/2$.

Esercizio 5. In $\mathbb{Z}$ si definisca un'operazione $\star$ ponendo

$$a \star b = ab + 4(a+b) + 12, \qquad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

(a) Si dimostri che $(\mathbb{Z}, \star)$ è un monoide commutativo.
(b) Si stabilisca quali sono gli elementi invertibili di $(\mathbb{Z}, \star)$.
(c) Si dimostri che la funzione $f : (\mathbb{Z}, \cdot) \to (\mathbb{Z}, \star)$ definita da $f(n) = n - 4$ è un omomorfismo di monoidi, dove con $(\mathbb{Z}, \cdot)$ si intende l'insieme $\mathbb{Z}$ dotato del prodotto usuale.

Soluzione. (a) Si ha $a \star b = b \star a$ e

$$(a \star b) \star c = abc + 4ab + 4ac + 4bc + 16(a+b+c) + 60 = a \star (b \star c).$$

L'elemento neutro è -3.
(b) Gli elementi invertibili sono l'elemento neutro -3 e l'elemento -5, infatti si ha $(-3) \star (-3) = -3$ e $(-5) \star (-5) = -3$.
(c) Bisogna dimostrare che $f(a \cdot b) = f(a) \star f(b)$. Effettuando i calcoli si trova che entrambi i membri sono uguali a $ab - 4$.

Esercizio 6. Sull'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi si definisca esplicitamente una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ tale che l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ sia costituito esattamente da due classi di equivalenza, una finita e l'altra infinita.

Soluzione.
$$\mathcal{R} = \{(0,0), (a,b), \text{ per ogni } a, b \neq 0\}.$$

Esercizio 7. Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}^3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{Z}\}$ con l'operazione di somma definita ponendo
$$(a,b,c) + (a',b',c') = (a+a', b+b', c+c').$$

(a) Si dimostri che $(\mathbb{Z}^3, +)$ è un gruppo commutativo, specificando chi è l'elemento neutro.
(b) Sia $H \subset \mathbb{Z}^3$ il sottoinsieme definito da

$$H = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \mid a+b+c = 0\}.$$

Si dimostri che $(H, +)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}^3, +)$.
(c) Sia $K \subset \mathbb{Z}^3$ il sottoinsieme definito da

$$K = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \mid a+b+c = 1\}.$$

Si dimostri che $(K, +)$ non è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}^3, +)$.

Soluzione. (a) Ovvio (deriva dal fatto che $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo). L'elemento neutro è $(0,0,0)$ e l'opposto di (a,b,c) è $(-a,-b,-c)$.
(b) H contiene l'elemento neutro, inoltre se $(a,b,c) \in H$ anche $(-a,-b,-c) \in H$. Infine, siano (a,b,c) e (a',b',c') due elementi di H. Allora anche $(a+a', b+b', c+c') \in H$, dato che $(a+a')+(b+b')+(c+c') = (a+b+c)+(a'+b'+c') = 0+0 = 0$.
(c) K non contiene l'elemento neutro $(0,0,0)$, quindi non può essere un sottogruppo di $(\mathbb{Z}^3, +)$.

Esercizio 8. Utilizzando il metodo di Cramer si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.
$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 0 \\ x + 2y + 5z = 4 \\ x + 8y + z = 2 \end{cases}$$

Soluzione. Si ha

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} = -50 \equiv 5 \bmod 11, \qquad \Delta_x = \det \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} = 58 \equiv 3 \bmod 11,$$

$$\Delta_y = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -14 \equiv 8 \bmod 11, \qquad \Delta_z = \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} = -46 \equiv 9 \bmod 11.$$

Si ha quindi $5^{-1} = 9$ in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ e $x = 9 \cdot 3 \equiv 5 \bmod 11$, $y = 9 \cdot 8 \equiv 6 \bmod 11$, $z = 9 \cdot 9 \equiv 4 \bmod 11$.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a coefficienti in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Si dica se la matrice A ammette autovalori in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. In caso affermativo, se ne determinino gli autovalori e gli autovettori.

Soluzione. Il polinomio caratterisco di A è $\lambda^2 - 4\lambda - 5$, che si annulla per $\lambda = 5$ e $\lambda = 6$ (naturalmente in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$). La matrice A possiede dunque i due autovalori $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 6$. Gli autovettori corrispondenti sono $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (3, 1)$.

Esercizio 10. Si determinino tutti gli interi x, con $0 \leq x \leq 100$, che siano soluzioni del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7 \\ 5x \equiv 10 \pmod{20} \\ x \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

Soluzione. $x_1 = 10$ e $x_2 = 94$.