Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Prof. F. Bottacin

Appello — 31 gennaio 2007

Esercizio 1. Siano A, B e C tre insiemi. Si dimostri che

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

e che

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Esercizio 2. (a) Si dia la definizione di funzione iniettiva e si stabilisca se la seguente funzione è iniettiva:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \qquad n \mapsto 2n^2 + 1.$$

(b) Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni. Si dimostri che se $g \circ f$ è iniettiva allora f deve essere iniettiva ma g può non esserlo.

Esercizio 3. Per ciascuna delle seguenti corrispondenze tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ si stabilisca se essa è una funzione (*tutte le risposte devono essere motivate*):
(a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \mid x^4 = 2y - 1\}$.
(b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \mid 3x + 2 = y^2 - 3\}$.
(c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \mid x^4 = y^2\}$.
(d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \mid |3x| = |5y - 1|\}$.
(e) $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \mid 4x = y^2\}$.

Esercizio 4. Si dimostri, per induzione su n, che

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n + 1)^2$$

Esercizio 5. Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali.

$$\begin{cases} 2x \equiv 1 \bmod 5 \\ 3x \equiv 2 \bmod 8 \end{cases}$$

Esercizio 6. Si dia la definizione di relazione di equivalenza, di classi di equivalenza e di insieme quoziente. Si dimostri che la seguente è una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a = c + 5k, b = d + 6h,$$

per qualche $h, k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 7. Ad un ricevimento partecipano 12 persone (6 donne e 6 uomini).
(a) Se ogni persona stringe la mano ad ogni altra persona (una sola volta), quante strette di mano avvengono?
(b) In quanti modi diversi i partecipanti si possono sedere attorno ad una tavola rotonda? (due disposizioni che differiscono solo per una rotazione si devono considerare uguali).

(c) Stessa domanda del punto (b), con l'ulteriore richiesta che ogni uomo sia seduto accando a due donne.
(d) Qual è il numero minimo di balli necessari se si vuole che ogni donna possa danzare almeno una volta con ciascun uomo? (nell'ipotesi che tutti danzino sempre).
(e) All'ingresso a ciascuno dei sei uomini è stato consegnato un biglietto numerato (i biglietti sono numerati da 1 a 6). Lo stesso è stato fatto per le sei donne. Quante coppie (uomo, donna) si possono formare se è richiesto che la somma dei numeri stampati nei biglietti dell'uomo e della donna sia ≥ 6?

Esercizio 8. Si stabilisca se la seguente matrice, a coefficienti in $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$, è invertibile oppure no.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9. Nell'insieme $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si definisca un'operazione $\star$ ponendo

$$(a, b) \star (c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$

(a) Si dimostri che questa operazione è associativa e commutativa.
(b) Si determini l'elemento neutro per tale operazione.
(c) Si stabilisca quali sono gli elementi invertibili e si determinino i loro inversi.

Esercizio 10. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ (il simbolo $[n]$ indica la classe di equivalenza di n modulo 7).

$$\begin{cases} [2]x + [3]y + [4]z = [2] \\ x + [3]y + [2]z = [1] \\ [2]y + z = [4] \end{cases}$$

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Prof. F. Bottacin

Appello — 31 gennaio 2007

Esercizio 1. Siano A, B e C tre insiemi. Si dimostri che

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

e che

$$(B \cup C) \setminus (B \cap C) = (B \setminus C) \cup (C \setminus B).$$

Esercizio 2. (a) Si dia la definizione di funzione suriettiva e si stabilisca se la seguente funzione è suriettiva:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad n \mapsto |n-2| + 1.$$

(b) Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni. Si dimostri che se $g \circ f$ è suriettiva allora g deve essere suriettiva ma f può non esserlo.

Esercizio 3. Per ciascuna delle seguenti corrispondenze tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ si stabilisca se essa è una funzione (*tutte le risposte devono essere motivate*):
(a) $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \,|\, |2x| = |7y-1|\}$.
(b) $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \,|\, x^6 = y^2\}$.
(c) $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \,|\, x^3 = 2y+1\}$.
(d) $R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \,|\, 9x = y^2\}$.
(e) $R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \,|\, 3x-2 = y^2+1\}$.

Esercizio 4. Si dimostri, per induzione su n, che

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (n(n+1)/2)^2$$

Esercizio 5. Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali.

$$\begin{cases} 2x \equiv 1 \bmod 7 \\ 3x \equiv 2 \bmod 10 \end{cases}$$

Esercizio 6. Si dia la definizione di relazione di equivalenza, di classi di equivalenza e di insieme quoziente. Si dimostri che la seguente è una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a = c + 7k, b = d + 4h,$$

per qualche $h, k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 7. Ad un ricevimento partecipano 14 persone (7 donne e 7 uomini).
(a) Se ogni persona stringe la mano ad ogni altra persona (una sola volta), quante strette di mano avvengono?
(b) In quanti modi diversi i partecipanti si possono sedere attorno ad una tavola rotonda? (due disposizioni che differiscono solo per una rotazione si devono considerare uguali).

(c) Stessa domanda del punto (b), con l'ulteriore richiesta che ogni uomo sia seduto accando a due donne.
(d) Qual è il numero minimo di balli necessari se si vuole che ogni donna possa danzare almeno una volta con ciascun uomo? (nell'ipotesi che tutti danzino sempre).
(e) All'ingresso a ciascuno dei sette uomini è stato consegnato un biglietto numerato (i biglietti sono numerati da 1 a 7). Lo stesso è stato fatto per le sette donne. Quante coppie (uomo, donna) si possono formare se è richiesto che la somma dei numeri stampati nei biglietti dell'uomo e della donna sia ≥ 6?

Esercizio 8. Si stabilisca se la seguente matrice, a coefficienti in $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, è invertibile oppure no.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9. Nell'insieme $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si definisca un'operazione $\star$ ponendo

$$(a, b) \star (c, d) = (ad + bc, bd - ac).$$

(a) Si dimostri che questa operazione è associativa e commutativa.
(b) Si determini l'elemento neutro per tale operazione.
(c) Si stabilisca quali sono gli elementi invertibili e si determinino i loro inversi.

Esercizio 10. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (il simbolo $[n]$ indica la classe di equivalenza di n modulo 5).

$$\begin{cases} [2]x + [3]y + [4]z = [1] \\ x + [3]y + z = [3] \\ [2]y + z = [2] \end{cases}$$