Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Prof. F. Bottacin

Appello — 21 febbraio 2007

Esercizio 1. (a) Siano A, B e C tre insiemi. Si dimostri che

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$$

(b) Sia $f : A \to B$ una funzione e siano $X, Y \subset B$. Si dimostri che

$$f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y).$$

Esercizio 2. Date le seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x &\mapsto 3x + 1, \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x &\mapsto x^2 - x, \end{aligned}$$

si stabilisca se f e g sono iniettive, suriettive, biiettive. Si calcolino poi le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizio 3. (a) Si consideri il numero $N = (5312)_6$ (in base 6). Si scriva N in base 7.
(b) Si dimostri che un numero espresso in base 6 è divisibile per 5 se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per 5 (suggerimento: si usi la congruenza modulo 5).

Esercizio 4. Si calcoli il massimo comun divisore d degli interi $a = 532$ e $b = 4368$. Si determinino inoltre due interi α e β tali che sia $d = a\alpha + b\beta$.

Esercizio 5. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

ove a, b, c sono numeri reali. Si dimostri che, per ogni $n \geq 1$, si ha

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & na^{n-1}b \\ 0 & c^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali.

$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \bmod 7 \\ 2x \equiv 13 \bmod 21 \end{cases}$$

Esercizio 7. Si stabilisca se la seguente matrice, a coefficienti in $\mathbb{Q}$, è invertibile. In caso di risposta affermativa se ne determini l'inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. (a) L'indirizzo MAC di una scheda di rete è una sequenza del tipo `xx:xx:xx:xx:xx:xx`, dove ogni `xx` rappresenta un numero di due cifre in base 16. Quanti indirizzi diversi, di questo tipo, possono esistere?

(b) Le targhe automobilistiche di una certa nazione sono costituite da un gruppo di due lettere (dalla A alla Z), seguito da un gruppo di quattro cifre (da 0 a 9), seguito da un gruppo di altre due lettere. Quante targhe diverse sono possibili?

(c) Un codice di accesso è costituito da una sequenza di lettere maiuscole (dalla A alla Z) e/o di cifre (da 0 a 9), la cui lunghezza deve essere compresa tra 2 e 5. Quanti codici diversi, di questo tipo, esistono?

(d) Quante quaterne (non ordinate) diverse si possono formare con i numeri da 1 a 90?

Esercizio 9. Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si consideri la seguente relazione:

$$(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow 5^a\, 7^b \leq 5^c\, 7^d.$$

(a) Si dimostri che $\preceq$ è una relazione d'ordine.
(b) Si tratta di un ordine totale?
(c) Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme $A = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (3, 0), (2, 2), (1, 3)\}$ e si determini il minimo e il massimo di A.

Esercizio 10. Si determinino gli autovalori e gli autovettori della seguente matrice, a coefficienti in $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -4 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

MATEMATICA DISCRETA

Prof. F. Bottacin

Appello — 21 febbraio 2007

Esercizio 1. (a) Siano A, B e C tre insiemi. Si dimostri che

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$$

(b) Sia $f : A \to B$ una funzione e siano $X, Y \subset B$. Si dimostri che

$$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y).$$

Esercizio 2. Date le seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 2x - 1, \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2 + 3x, \end{aligned}$$

si stabilisca se f e g sono iniettive, suriettive, biiettive. Si calcolino poi le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizio 3. (a) Si consideri il numero $N = (2651)_8$ (in base 8). Si scriva N in base 5.
(b) Si dimostri che un numero espresso in base 8 è divisibile per 7 se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per 7 (suggerimento: si usi la congruenza modulo 7).

Esercizio 4. Si calcoli il massimo comun divisore d degli interi $a = 552$ e $b = 4548$. Si determinino inoltre due interi α e β tali che sia $d = a\alpha + b\beta$.

Esercizio 5. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix},$$

ove a, b, c sono numeri reali. Si dimostri che, per ogni $n \geq 1$, si ha

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ na^{n-1}c & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali.

$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \bmod 5 \\ 2x \equiv 13 \bmod 15 \end{cases}$$

Esercizio 7. Si stabilisca se la seguente matrice, a coefficienti in $\mathbb{Q}$, è invertibile. In caso di risposta affermativa se ne determini l'inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. (a) Gli indirizzi IP sono delle sequenze del tipo `xx.xx.xx.xx`, dove ogni `xx` rappresenta un numero di due cifre in base 16. Quanti indirizzi diversi, di questo tipo, possono esistere?

(b) Le targhe automobilistiche di una certa nazione sono costituite da un gruppo di tre lettere (dalla A alla Z), seguito da un gruppo di tre cifre (da 0 a 9), seguito da un gruppo di altre due lettere. Quante targhe diverse sono possibili?

(c) Un codice di accesso è costituito da una sequenza di lettere maiuscole (dalla A alla Z) e/o di cifre (da 0 a 9), la cui lunghezza deve essere compresa tra 3 e 6. Quanti codici diversi, di questo tipo, esistono?

(d) Quante cinquine (non ordinate) diverse si possono formare con i numeri da 1 a 90?

Esercizio 9. Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si consideri la seguente relazione:

$$(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow 5^a\, 3^b \leq 5^c\, 3^d.$$

(a) Si dimostri che $\preceq$ è una relazione d'ordine.

(b) Si tratta di un ordine totale?

(c) Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme $A = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (3, 0), (2, 2), (1, 3)\}$ e si determini il minimo e il massimo di A.

Esercizio 10. Si determinino gli autovalori e gli autovettori della seguente matrice, a coefficienti in $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & 6 \\ 3 & -9 & -7 \end{pmatrix}.$$