

MATEMATICA DISCRETA

PROF. F. BOTTACIN

Appello — 7 maggio 2007

Esercizio 1. (a) Siano A e B due insiemi. Si dimostri che

$$(A \setminus B) \cup B = (B \setminus A) \cup A$$

(b) Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione e siano $X, Y \subset A$. Si dimostri che se f è iniettiva si ha

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y).$$

Esercizio 2. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ e sia $f : A \rightarrow A$ la funzione definita come segue:

$$f(n) = \min\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ è primo e } p \text{ divide } n\}.$$

- (a) f è iniettiva? f è suriettiva?
- (b) Si calcoli $f(12)$, $f(13)$, $f(14)$ e $f(15)$.
- (c) Per quali $n \in A$ si ha $f(n) = n$?
- (d) Si dimostri che $f \circ f = f$.

Esercizio 3. Si dimostri per induzione su n che, per ogni $n \geq 0$ si ha

$$\sum_{j=0}^n 3j = \frac{3n^2 + 3n}{2}.$$

Esercizio 4. Utilizzando l'algoritmo della divisione di Euclide si determini se 5 è invertibile modulo 1832. In caso affermativo se ne determini l'inverso (in $\mathbb{Z}/1832\mathbb{Z}$).

Esercizio 5. Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali (se esso ammette soluzioni).

$$\begin{cases} 4x \equiv 3 \pmod{11} \\ 3x \equiv 1 \pmod{8} \\ 5x \equiv 2 \pmod{6} \end{cases}$$

Esercizio 6. In \mathbb{Z} si definisca un'operazione \star ponendo

$$a \star b = a + b + 5ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

- (a) Si dimostri che (\mathbb{Z}, \star) è un monoide commutativo.
- (b) Si stabilisca quali sono gli elementi invertibili di (\mathbb{Z}, \star) .
- (c) Si stabilisca (giustificando la risposta) se (\mathbb{N}, \star) è un sottomonoido di (\mathbb{Z}, \star) .

Esercizio 7. Si stabilisca se la seguente matrice, a coefficienti in \mathbb{Z} , è invertibile. In caso di risposta affermativa se ne determini l'inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -6 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Si determini il rango della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 8 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Sugg.: tramite operazioni elementari sulle righe si riduca la matrice a forma triangolare)

Esercizio 9. Sia a un numero reale assegnato. Si determini per quali valori di a il seguente sistema ammette soluzioni, e lo si risolva.

$$\begin{cases} x + ay - 2z = -2 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ ax - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 10. Si determinino gli autovalori e gli autovettori della seguente matrice, a coefficienti in \mathbb{R} .

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$