Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Prof. F. Bottacin

Appello — 18 giugno 2007

Esercizio 1. Siano A e B due insiemi. Si dimostri che:
(a) $A \setminus B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$
(b) $A \setminus B = B \Rightarrow A = B = \emptyset$.

Esercizio 2. Indichiamo con $|A|$ la cardinalità di un insieme A.
(a) È vero o falso che $|A \cup B| = |A| + |B|$?
(b) È vero o falso che $|A \setminus B| = |A| - |B|$?
(c) Si dimostri che $|A \triangle B| = |A| + |B| - 2\,|A \cap B|$.
(d) Si dia un esempio di insiemi non vuoti A e B tali che $|A| = |B| = |A \setminus B|$.
(e) Si dia un esempio di insiemi non vuoti A e B tali che $|A| = |B| = |A \triangle B|$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita da

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{se } n \text{ è pari,} \\ -n & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Sia $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita da

$$g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \geq 0 \text{ è divisibile per 4,} \\ |n| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si dimostri che f non è suriettiva, che g non è iniettiva, ma che $g \circ f$ è biiettiva.

Esercizio 4. Si dimostri, per induzione su n, che si ha

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n},$$

per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 5. (a) Quanti sono i numeri di telefono di nove cifre che iniziano con 089 e terminano con una cifra pari?
(b) Dato che due punti nel piano definiscono una sola retta (quella passante per quei due punti), quante rette vengono definite da n punti del piano? (si suppone che gli n punti vengano assegnati in modo che non esistano tre punti allineati).
(c) Un codice per l'apertura di una cassaforte è composto da una sequenza di 5 cifre (da 0 a 9). Quanti sono i codici che contengono il numero 7 esattamente una volta?
(d) Con le stesse ipotesi del punto (c), quanti sono i codici che contengono il numero 7 almeno una volta?

Esercizio 6. Sia $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e sia $B = \{(m, n) \in A \mid m + 2n = 0\}$. Definiamo una relazione in A ponendo

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow (a - c, b - d) \in B.$$

(a) Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
(b) Si descriva la classe di equivalenza dell'elemento $(2, 3)$.
(c) Sia $A/\sim$ l'insieme quoziente e si consideri la funzione $f : A/\sim \to \mathbb{Z}$ definita da $f([(a, b)]) = a + 2b$. Si dimostri che f è ben definita ed è biiettiva.

Esercizio 7. Si consideri il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \bmod 7 \\ 2x \equiv 3 \bmod 9 \end{cases}$$

(a) Si determini la più grande soluzione negativa.
(b) Si determini la più piccola soluzione positiva pari.
(c) Si determini la più piccola soluzione positiva dispari.

Esercizio 8. Nell'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ si consideri l'operazione $\star$ definita da

$$a \star b = 2a + 2b + 1.$$

Si stabilisca se questa operazione è associativa, commutativa, se esiste l'elemento neutro e quali elementi sono invertibili.

Esercizio 9. Si risolva con il metodo di Cramer il seguente sistema di equazioni lineari, a coefficienti in $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 1 \\ x - 3y + 2z = -2 \\ 3x - 5y - 4z = 3 \end{cases}$$

Esercizio 10. Si determinino gli autovalori e gli autovettori della seguente matrice, a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$