Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Prof. F. Bottacin

Appello — 18 luglio 2007

Esercizio 1. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e $\mathbb{P}$ il sottoinsieme dei numeri pari.
(a) Si dia un esempio di funzione iniettiva, ma non suriettiva, da $\mathbb{P}$ a $\mathbb{N}$.
(b) Si dia un esempio di funzione iniettiva, ma non suriettiva, da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{P}$.
(c) Si dia un esempio di funzione suriettiva, ma non iniettiva, da $\mathbb{P}$ a $\mathbb{N}$.
(d) Si dia un esempio di funzione suriettiva, ma non iniettiva, da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{P}$.
(e) Si dia un esempio di funzione biiettiva da $\mathbb{P}$ a $\mathbb{N}$.

Esercizio 2. (a) Sia A un insieme finito e scegliamo un elemento $a \in A$. Sono di più i sottoinsiemi di A che contengono a oppure quelli che non lo contengono?
(b) Sia A un insieme finito e sia X un sottoinsieme di A, di cardinalità ≥ 2. Sono di più i sottoinsiemi di A che contengono X oppure quelli che non lo contengono?
(c) In quanti modi si possono distribuire 30 libri tra 7 amici? (si suppone che tutti i libri siano diversi, inoltre non è richiesto che tutte le persone ricevano dei libri)
(d) In quanti modi si possono distribuire 30 libri tra 7 amici, se ora si richiede che tutti ricevano almeno un libro?
(**Tutte le risposte devono essere motivate.**)

Esercizio 3. (a) Si determini il più grande intero positivo che si rappresenta in base 6 con 5 cifre, di cui almeno 3 distinte, e se ne dia la rappresentazione in base 8.
(b) Sia n un numero intero somma di due quadrati, cioè $n = a^2 + b^2$, per qualche $a, b \in \mathbb{N}$. Si dimostri che un tale n non può essere congruo a 3 modulo 4.

Esercizio 4. Si dimostri, per induzione su n, che si ha

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 5.
(a) È possibile trovare dei numeri interi $x, y \in \mathbb{Z}$ che risolvano l'equazione $21x + 33y = 27$? In caso di risposta affermativa trovarli, in caso di risposta negativa spiegare perché.
(b) È possibile trovare dei numeri interi $x, y \in \mathbb{Z}$ che risolvano l'equazione $21x + 33y = 25$? In caso di risposta affermativa trovarli, in caso di risposta negativa spiegare perché.

Esercizio 6. Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si consideri la relazione $\sim$ definita da

$a \sim b$ se a e b hanno lo stesso numero di cifre quando sono espressi in base 5.

(a) La relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza?
(b) È vero o falso che $(2321)_{10} \sim (2740)_{10}$?
(c) Quanti elementi contiene la classe di equivalenza di $(32)_5$?
(d) Qual'è il più piccolo intero positivo n tale che $n \sim (231)_{10}$?
(e) La relazione $\sim$ è compatibile con l'operazione di somma?

Esercizio 7. Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sia $\preceq$ la relazione definita da

$$(a, b) \preceq (c, d) \text{ se } 3a + 2b \leq 3c + 2d.$$

Si stabilisca se $\preceq$ è una relazione d'ordine.

Esercizio 8. Si calcoli il determinante della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9. Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 4x \equiv 2 \bmod 5 \\ 6x \equiv 1 \bmod 11 \end{cases}$$

Esercizio 10. Si risolva con il metodo di Cramer il seguente sistema di equazioni lineari, a coefficienti in $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ 2x + 5y - 3z = -1 \\ 3x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$