Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Prof. F. Bottacin

Appello — 17 settembre 2007

Esercizio 1. Sia A un insieme con 6 elementi, B un insieme con 9 elementi e C un insieme con 4 elementi.
(a) Quante sono le funzioni da A in B? e quante quelle da A in C?
(b) Quante sono le funzioni iniettive da A in B? e quante quelle da A in C?
(c) Quante sono le funzioni non iniettive da A in B? e quante quelle da A in C?
(d) Quante sono le funzioni invertibili da B in sé stesso?
(e) Quanti sono i sottoinsiemi di B?
(f) Quanti sono i sottoinsiemi di B che contengono 3 elementi prefissati?

Esercizio 2. Si stabilisca quali delle seguenti corrispondenze $R \subset A \times B$ sono delle funzioni da A in B (tutte le risposte devono essere motivate).
(a) A insieme (qualsiasi) di cardinalità ≥ 2, $B = \mathcal{P}(A)$, $R = \{(x, X) \mid x \in A, X \subset A, x \notin X\}$.
(b) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$, $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, |a| - b = 0\}$.
(c) $A =$ l'insieme delle parole della lingua italiana, $B = \mathbb{Z}$, $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, b =$ lunghezza di $a\}$ (per *lunghezza* di una parola si intende il numero di lettere che la compongono).
(d) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$, $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, 3a^2 + 5b + 1 = 0\}$.
(e) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$, $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, 3a - |b| = 0\}$.

Esercizio 3. Siano $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 3x - 2$ e $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x^2 + x - 1$.
(a) Si stabilisca se le funzioni f e g sono iniettive, suriettive, biiettive.
(b) Si calcolino le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.
(c) Sia $A = \{1, 2, 3\}$. Si determini $f^{-1}(A)$ e $g^{-1}(A)$.

Esercizio 4. Ricordando che

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

si dimostri, per induzione su n, che si ha

$$(1 + 2 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3,$$

per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 5. Si risolva la seguente equazione congruenziale:

$$236\,x \equiv 2 \bmod 2673.$$

Esercizio 6. Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si consideri la relazione $\preceq$ definita da

$$(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow 3^a\, 5^d \leq 3^c\, 5^b.$$

(a) Si dimostri che $\preceq$ è una relazione d'ordine.
(b) Si stabilisca se si tratta di un ordine totale oppure no.
(c) La relazione d'ordine $\preceq$ è un buon ordinamento?
(d) Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme $A = \{(2, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$.

(e) Si determini il massimo e il minimo di A (se questi esistono).

Esercizio 7. Nell'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si consideri la seguente operazione:

$$(a, b) \star (c, d) = (ad + bc, bd - ac).$$

(a) L'operazione $\star$ è associativa?
(b) L'operazione $\star$ è commutativa?
(c) Si stabilisca se esiste l'elemento neutro.
(d) Si determini quali sono gli elementi invertibili di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (se questi esistono).

Esercizio 8. Si calcoli l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Esercizio 9. Si determinino autovalori e autovettori della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10. Si stabilisca per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ammette soluzioni, e lo si risolva:

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = \alpha + 2 \\ 2x + 7y + 3z = 4 \\ x + 3y - z = 2 \\ 2x + 8y + 7z = \alpha + 5 \end{cases}$$