Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Prof. F. Bottacin

Appello — 5 novembre 2007

Esercizio 1. Sia $f : A \to B$ una funzione. Si dimostri che, se f è iniettiva, si ha

$$f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y),$$

per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A. Si dimostri, fornendo un controesempio, che tale uguaglianza può non valere nel caso f non sia iniettiva.

Esercizio 2. Si stabilisca quali delle seguenti corrispondenze $R \subset A \times B$ sono delle funzioni da A in B (tutte le risposte devono essere motivate).
(a) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Q}$, $R = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B, 3|a| + 5b - 2a + 1 = 0\}$.
(b) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Q}$, $R = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B, |a| - |b| = 0\}$.
(c) $A = \mathbb{N}$, $B =$ l'insieme delle parole della lingua italiana, $R = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B, a =$ lunghezza di $b\}$ (per *lunghezza* di una parola si intende il numero di lettere che la compongono).
(d) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $R = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B, 3a + 8b + 5 = 0\}$.
(e) $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $B = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $R = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B, b$ è il più grande numero intero che divide $a\}$.

Esercizio 3.
(a) Quanti sono gli anagrammi (non necessariamente di senso compiuto) della parola "COMPUTER"?
(b) Quanti sono gli anagrammi (non necessariamente di senso compiuto) della parola "ANALIZZARE"?
(c) Dato un alfabeto composto da 21 simboli, quante parole (cioè sequenze di simboli) di lunghezza compresa tra 6 e 7 (inclusi) si possono formare?
(d) Quante sono le funzioni iniettive da un insieme di 5 elementi in un insieme di 9 elementi?
(e) Quanti sono i sottoinsiemi di cardinalità 6 di un insieme contenente 12 elementi?

Esercizio 4. Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \bmod 7 \\ 3x \equiv 1 \bmod 5 \\ 2x \equiv 3 \bmod 11 \end{cases}$$

Esercizio 5. In $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ si risolva, con il metodo di Cramer, il seguente sistema di equazioni (il simbolo $[n]$ indica la classe di equivalenza del numero n modulo 7):

$$\begin{cases} [2]x + [3]y + [4]z = [3] \\ x + [2]z = [1] \\ [2]y + z = [6] \end{cases}$$

Esercizio 6. Nell'insieme $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si definisca un'operazione binaria $\star$ ponendo

$$(a, b) \star (a', b') = (a + ba', bb').$$

Si stabilisca se questa operazione è associativa, commutativa, se esiste un elemento neutro e se esistono degli elementi invertibili. In caso affermativo si determini quali coppie del tipo (a, b) sono invertibili e quale è il loro inverso.

Esercizio 7. Nell'insieme M delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti razionali si consideri il sottoinsieme N costituito da tutte le matrici che commutano con la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si descrivano esplicitamente tutti gli elementi di N. Si stabilisca se l'insieme N è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto di matrici. Se $B \in N$ è una matrice invertibile, è vero oppure no che anche la sua inversa B^{-1} appartiene a N?

Esercizio 8. Sia $(G, \cdot)$ il gruppo degli elementi invertibili di $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, \cdot)$.
(a) Si elenchino gli elementi di G.
(b) Si scriva la tabella moltiplicativa di $(G, \cdot)$.
(c) Si stabilisca se G è un sottoinsieme stabile di $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$.

Esercizio 9. Siano A, B e C tre insiemi.
(a) Sia $f : A \to B$ una funzione. Si dimostri che se f non è iniettiva, allora $g \circ f$ non è iniettiva, per ogni funzione $g : B \to C$.
(b) Sia $g : B \to C$ una funzione. Si dimostri che se g non è suriettiva, allora $g \circ f$ non è suriettiva, per ogni funzione $f : A \to B$.
(c) Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni. Si dimostri che se $g \circ f$ è biiettiva, allora f deve essere iniettiva e $g : B \to C$ deve essere suriettiva.

Esercizio 10. Si determini una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in modo tale che i suoi autovalori e autovettori siano i seguenti: autovalore $\lambda_1 = 3$ con autovettore $v_1 = (1, 3)$; autovalore $\lambda_2 = 5$ con autovettore $v_2 = (-2, 1)$.