Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

PROF. F. BOTTACIN

Appello — 31 gennaio 2008

Esercizio 1. Siano A, B e C tre insiemi. Si dimostri che

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

e che

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C).$$

Sia poi $f : A \to B$ una funzione e siano $X, Y \subseteq A$. Si dimostri che

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y).$$

Esercizio 2. Si consideri la funzione definita dall'espressione

$$f(x) = \frac{2x-3}{1-5x},$$

dove $x \in \mathbb{Q}$. Si determini il più grande sottoinsieme $A \subset \mathbb{Q}$ dove f è definita (cioè, l'*insieme di definizione* di f). Si determini poi l'immagine $B = f(A)$ dell'insieme A, si dimostri che la funzione $f : A \to B$ è biiettiva e se ne determini l'inversa.

Esercizio 3. Per ciascuna delle seguenti corrispondenze tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ si stabilisca se essa è una funzione (*tutte le risposte devono essere motivate*):
(a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid x = y\}$.
(b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid x^2 = y\}$.
(c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid x = y^2\}$.
(d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid 3x + 1 = 2y + 5\}$.
(e) $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid |x| - 2 = |y - 2|\}$.

Esercizio 4. Si dimostri, per induzione su n, che

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n.$$

Da questa formula si deduca poi una formula per la somma

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

Esercizio 5. (a) Si determini il più grande intero positivo n che si rappresenta in base 6 con 4 cifre tutte distinte, delle quali almeno una è pari a 1. Si rappresenti poi tale n in base 9.
(b) Si consideri il numero $(543)_7$ (in base 7) e lo si rappresenti in base 3.
(c) Si determini qual'è quella base B per cui il numero $(20)_B$ (in base B) è uguale al numero $(110)_{B/2}$ (espresso nella base $B/2$).

Esercizio 6. Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali.

$$\begin{cases} 3x \equiv 5 \bmod 7 \\ x \equiv 2 \bmod 3 \\ 3x \equiv 1 \bmod 4 \end{cases}$$

Esercizio 7. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi si consideri la relazione $\sim$ definita ponendo:

$$x \sim y \text{ se } 3x + 5y \text{ è pari.}$$

(a) Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
(b) Si descrivano le classi di equivalenza degli elementi 1 e 2.
(c) Si descriva l'insieme quoziente $A/\sim$.

Esercizio 8. Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si determini il massimo comun divisore d dei due numeri $a = 234$ e $b = 184$. Si determinino poi due numeri interi α e β tali che $d = a\alpha + b\beta$.
Infine, si stabilisca se il numero 184 è invertibile modulo 234 e, in caso affermativo, se ne determini l'inverso.

Esercizio 9. Si calcoli il determinante della seguente matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ha senso chiedersi se tale matrice è invertibile? Se sì, qual'è la risposta?

Esercizio 10. Si determinino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$