Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

# MATEMATICA DISCRETA

Prof. F. Bottacin

**Appello — 21 febbraio 2008**

---

**Esercizio 1.** Siano $A$, $B$ e $C$ tre insiemi. Si dimostri che

$$(A \triangle B) \setminus C = (A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$$

e che

$$A \setminus (B \triangle C) = (A \setminus (B \cup C)) \cup (A \cap B \cap C).$$

Sia poi $f : A \to B$ una funzione e siano $X, Y \subseteq B$. Si dimostri che

$$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y).$$

**Esercizio 2.** (a) Si consideri la funzione $f : \mathbb{Q} \setminus \{-2\} \to \mathbb{Q}$ definita da

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}.$$

Si determini se $f$ è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
(b) Si considerino le due funzioni $g$ e $h$ definite da

$$g(x) = \frac{2-x}{x-1}, \qquad h(y) = \frac{1}{y+1}$$

($x$ e $y$ numeri razionali). Si calcolino le funzioni composte $g \circ h$ e $h \circ g$.
(c) Si determini l'inversa della funzione

$$x \mapsto \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

**Esercizio 3.** Per ciascuna delle seguenti corrispondenze tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ si stabilisca se essa è una funzione (*tutte le risposte devono essere motivate*):
(a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid 2x = 3y + 1\}$.
(b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid x^2 + y^2 = 8\}$.
(c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid 2x^2 - xy + 3 = 0\}$.
(d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid 3|x - 1| = 2y - 1\}$.
(e) $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid |x| + 2 = |y + 2|\}$.

**Esercizio 4.** Si dimostri, per induzione su $n$, che

$$3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2n^2 + n.$$

**Esercizio 5.** Sia $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Si dimostri che ponendo $n < \infty$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, è possibile estendere a tutto l'insieme $\overline{\mathbb{Z}}$ la relazione d'ordine naturale definita in $\mathbb{Z}$. Si dimostri che in questo modo l'insieme $\overline{\mathbb{Z}}$ risulta essere totalmente ordinato.

Definiamo un'operazione binaria $\oplus$ in $\overline{\mathbb{Z}}$ ponendo

$$a \oplus b = \min\{a, b\},$$

per ogni $a, b \in \overline{\mathbb{Z}}$. Si dimostri che $(\overline{\mathbb{Z}}, \oplus)$ è un monoide commutativo, specificando chi è l'elemento neutro. Infine si dimostri che vale la seguente proprietà distributiva:

$$a + (b \oplus c) = (a + b) \oplus (a + c),$$

per ogni $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

**Esercizio 6.** Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali.

$$\begin{cases} 4x \equiv 1 \bmod 5 \\ 4x \equiv 1 \bmod 7 \\ 2x \equiv 1 \bmod 3 \end{cases}$$

**Esercizio 7.** Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si consideri la relazione $\preceq$ definita ponendo:

$$(a, b) \preceq (c, d) \text{ se } 2^{a-c} \leq 5^{d-b}.$$

(a) Si dimostri che $\preceq$ è una relazione d'ordine.
(b) Si tratta di un ordine totale oppure no?
(c) Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme

$$A = \{(2, 0), (1, 1), (0, 2), (3, 0), (2, 1), (2, 2)\}.$$

(d) Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di $A$.

**Esercizio 8.** Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ (il simbolo $[n]$ indica la classe di equivalenza di $n$ modulo 11).

$$\begin{cases} [2]x + [8]y + [3]z = [1] \\ x + [7]z = [3] \\ [5]y + z = [2] \end{cases}$$

**Esercizio 9.** Si consideri la seguente matrice, definita in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, e se ne calcoli il determinante.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si stabilisca poi se tale matrice è invertibile (attenzione: non è richiesto il calcolo della matrice inversa).

**Esercizio 10.** Si determinino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$