Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Prof. F. Bottacin

Appello — 23 aprile 2008

Esercizio 1. Siano A, B e C tre insiemi.
(a) Si dimostri che:

$$\Big(C = A \setminus B, \quad C \subseteq B\Big) \quad \Rightarrow \quad C = \emptyset.$$

(b) Si dimostri che:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset.$$

(c) Si dimostri che non vale, in generale, la seguente uguaglianza:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

Esercizio 2. (a) Si consideri la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si stabilisca se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
(b) Sia $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da $g(r, s) = 2^r\, 3^s$. Si stabilisca se g è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
(c) Si calcolino le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.
(d) Si fornisca un esempio di una funzione $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ iniettiva ma non suriettiva, e un esempio di una funzione $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ suriettiva ma non iniettiva.

Esercizio 3. Si hanno a disposizione cioccolatini di tre tipi: chiamiamoli *tipo A*, *tipo B* e *tipo C*.
(a) Si vogliono comporre delle scatole contenenti 30 cioccolatini ciascuna. Quante scatole diverse si possono comporre?
(b) Prendiamo una scatola che contiene 10 cioccolatini di tipo A, 10 di tipo B e 10 di tipo C. In quanti modi diversi si possono disporre i 30 cioccolatini all'interno della scatola?
(c) Quanti anagrammi diversi (non necessariamente di senso compiuto) si possono formare con le lettere della parola CIOCCOLATINI ?

Esercizio 4. Per ciascuna delle seguenti corrispondenze si stabilisca se essa è una funzione (*tutte le risposte devono essere motivate*):
(a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, y \text{ divide } x\}$.
(b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, \text{ogni numero primo che divide } x \text{ divide anche } y\}$.
(c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \,|\, y = x\}$.
(d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, |x| - y = 0\}$.
(e) $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \,|\, xy \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 5. Utilizzando l'algoritmo di Euclide si determini l'inverso di 237 modulo 3251.

Esercizio 6. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ove $a \in \mathbb{N}$. Si dimostri, per induzione su n, che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & (2^n - 1)\, a \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali si definisca una relazione ponendo $a \sim b$ se esiste $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda > 0$, tale che $b = \lambda a$.
(a) Si verifichi che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
(b) Si determinino le classi di equivalenza degli elementi 2 e 3.
(c) Si descriva l'insieme quoziente $\mathbb{Q}/\sim$.

Esercizio 8. Indichiamo con S l'insieme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (con $n \geq 2$). Si dica se è possibile definire, sull'insieme S, una relazione d'ordine totale. In caso affermativo si determini quante sono le relazioni d'ordine totale che si possono definire in S. Si stabilisca inoltre se è possibile definire una relazione d'ordine totale $\preceq$ tale che

$$a_1 \preceq b_1, \quad a_2 \preceq b_2 \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_2 \preceq b_1 + b_2,$$

per ogni $a_1, a_2, b_1, b_2 \in S$.

Esercizio 9. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (il simbolo $[n]$ indica la classe di equivalenza di n modulo 8).

$$\begin{cases} [2]x - [3]y + z = [1] \\ -x + [2]y - [2]z = [-1] \\ [3]x + y - [4]z = [0] \end{cases}$$

Esercizio 10. Si determinino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$