Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Prof. F. Bottacin

Appello — 16 giugno 2008

Esercizio 1. (a) Dato un insieme finito A, indichiamo con $|A|$ il numero di elementi di A. Si dimostri che, dati tre insiemi finiti qualunque A, B e C, si ha:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

(b) Data una funzione qualsiasi $f : X \to Y$ e un sottoinsieme $A \subset Y$, si definisca il sottoinsieme $f^{-1}(A)$ di X. Si dia un esempio in cui $A \neq \emptyset$ ma $f^{-1}(A) = \emptyset$. Infine si dimostri che, dati due sottoinsiemi $A, B \subset Y$, si ha

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = (3x + y, 2x + y).$$

(a) Si stabilisca se la funzione f è invertibile e, in caso affermativo, se ne determini l'inversa.
(b) Sia $A = \{(2, -1), (1, 2)\}$. Si determini l'immagine $f(A)$ e l'immagine inversa $f^{-1}(A)$.
(c) Si dica se esiste un elemento $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tale che $f(x, y) = (2x, 3y)$.

Esercizio 3. Si dimostri che, presi comunque $n + 1$ numeri interi x_0, x_1, ... , x_n, almeno una delle possibili differenze $x_i - x_j$ è divisibile per n.
(*Suggerimento:* si considerino le classi di equivalenza degli x_i in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.)

Esercizio 4. Per ciascuna delle seguenti corrispondenze si stabilisca se essa è una funzione (*tutte le risposte devono essere motivate*):
(a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} : 3|x - 2| - 5(y + 1) = 0\}$.
(b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} : 2x - y = 0\}$.
(c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |y| - 1 = |x - 1|\}$.
(d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : (x^2 + 1)\, y = 1\}$.
(e) $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : xy \geq 2\}$.

Esercizio 5. Dato un insieme di n elementi, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, si definisca una legge di composizione $\star$ in modo tale che $(A, \star)$ sia un semigruppo non commutativo. Si dica poi se, per tale legge di composizione, esiste in A un elemento neutro.

Esercizio 6. Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si consideri la relazione definita da

$$(a, b) \preceq (c, d) \text{ se e solo se } 4a + b \leq 4c + d.$$

Si spieghi perché questa NON è una relazione d'ordine.
Si consideri invece la relazione così definita:

$$(a, b) \preceq (c, d) \text{ se e solo se } (a, b) = (c, d), \text{ oppure } 4a + b < 4c + d.$$

Si dimostri che questa è una relazione d'ordine. Si tratta di una relazione d'ordine totale? Si disegni infine il diagramma di Hasse dell'insieme

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}.$$

Esercizio 7. Si dimostri, per induzione su n che, per ogni intero $n \geq 1$ si ha:

$$6\sum_{i=1}^{n} i^2 - n = 2n^3 + 3n^2.$$

Esercizio 8. Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 4x \equiv 3 \bmod 7 \\ 5x \equiv 1 \bmod 8 \\ 2x \equiv 1 \bmod 11 \end{cases}$$

Esercizio 9. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ (il simbolo $[n]$ indica la classe di equivalenza di n modulo 11).

$$\begin{cases} [2]x + [5]y + [7]z = [5] \\ [4]x + [2]y + [9]z = [1] \\ x + [3]y + [3]z = [3] \end{cases}$$

Esercizio 10. Si determinino gli autovalori e gli autovettori della seguente matrice a coefficienti in $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$