Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

GEOMETRIA II

Prof. F. Bottacin

Appello — 18 giugno 2008

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare simmetrica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
(a) Si dimostri che g è definita positiva e si determini una base ortonormale $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ di V.
(b) Si determini una matrice triangolare superiore P tale che ${}^tPAP$ sia la matrice identica.

Soluzione. I minori principali sono tutti positivi, quindi la matrice A (e quindi anche la forma bilineare g) è definita positiva.
Utilizzando il procedimento di Gram–Schmidt si ottiene (ad esempio) la seguente base ortonormale:

$$w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, v_1, \quad w_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6}\, v_1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\, v_2, \quad w_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\, v_1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\, v_2 + \sqrt{3}\, v_3, \quad w_4 = v_1 + v_3 + v_4.$$

La matrice P cercata è la matrice di cambiamento di base, cioè è la matrice le cui colonne sono le coordinate dei vettori w_i rispetto alla base v_j:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una sua base. Si consideri la forma quadratica $F : V \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x_1 v_1 + \cdots + x_4 v_4) = 2x_1x_2 - 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 - x_3^2 - x_4^2.$$

Sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica tale che $F(v) = g(v, v)$, per ogni $v \in V$.
(a) Si determini la matrice A di g rispetto alla base data di V.
(b) Si dica se g è non-degenere e se ne determini la segnatura e l'indice d'inerzia.
(c) Si determini una base ortogonale di V.
(d) Si determini una matrice invertibile P tale che la matrice ${}^tPAP$ sia diagonale.

Soluzione. La matrice A di g è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha $\det A = 5 \neq 0$, quindi A (e, di conseguenza, anche g) è non-degenere.

Per determinare una base ortogonale di V osserviamo che i vettori v_3 e v_4 sono ortogonali. Possiamo quindi cominciare a costruire una base ortogonale $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ ponendo $w_1 = v_4$ e $w_2 = v_3$. Si trova poi che come w_3 e w_4 si possono prendere i vettori $w_3 = v_2+2v_3+v_4$ e $w_4 = v_1-v_4$. Si ha $g(w_1, w_1) = -1$, $g(w_2, w_2) = -1$, $g(w_3, w_3) = 5$, $g(w_4, w_4) = 1$, quindi la matrice di g rispetto alla base $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ è

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da ciò si deduce che la segnatura di g e $(2, 2)$ e l'indice d'inerzia è $2 - 2 = 0$.
Infine, la matrice P cercata è la matrice le cui colonne sono le coordinate dei vettori w_i rispetto alla base v_j:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che ${}^tPAP = B$.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.
(a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.
(b) Si determinino gli autovalori di ϕ e i relativi autospazi.
(c) Si determinino (se esistono) una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1}AP$.

Soluzione. Il determinante di A è 36, quindi ϕ è invertibile. Il polinomio caratteristico di ϕ è

$$\det(A - x) = (x - 2)^2(x + 3)^2,$$

da cui si deduce che gli autovalori di ϕ sono 2 e -3 (entrambi con molteplicità 2). L'autospazio relativo all'autovalore 2 ha dimensione 2 ed è generato dai vettori $v_1 = {}^t(2, 0, 1, 0)$ e $v_2 = {}^t(0, -1, 1, 2)$. L'autospazio relativo all'autovalore -3 ha dimensione 2 ed è generato dai vettori $v_3 = {}^t(1, 0, -2, 0)$ e $v_4 = {}^t(1, -3, 1, 1)$. La matrice A è dunque diagonalizzabile e le matrici P e D cercate sono

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le tre rette

$$r_1 : \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 2x - z = -1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - 2y = -13 \\ x - 2y + z = -17 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} 7x - y = -13 \\ x + z = -5 \end{cases}$$

(a) Mostrare che r_1 e r_2 sono sghembe e calcolare la reciproca distanza.
(b) Trovare i punti $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$ di minima distanza.
(c) Mostrare che la retta t interseca sia r_1 che r_2 e trovare i punti $Q_1 = r_1 \cap t$ e $Q_2 = r_2 \cap t$.
(d) Calcolare il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2 e l'area del triangolo di vertici P_1, Q_1, Q_2.

Soluzione. Le rette r_1 e r_2 non sono incidenti (non hanno punti in comune). Inoltre r_1 è parallela al vettore $v_1 = {}^t(1, 2, 2)$ mentre r_2 è parallela al vettore $v_2 = {}^t(2, 1, 0)$, quindi r_1 e r_2 non sono parallele:

esse sono dunque sghembe. Il generico punto di r_1 è $P_\lambda = {}^t(\lambda, 3+2\lambda, 1+2\lambda)$, mentre il generico punto di r_2 è $Q_\mu = {}^t(-13+2\mu, \mu, -4)$. Imponendo che il vettore $P_\lambda - Q_\mu$ sia ortogonale ai vettori v_1 e v_2 si trova $\lambda = -1$ e $\mu = 5$. I punti P_1 e P_2 cercati sono quindi $P_1 = {}^t(-1, 1, -1)$ e $P_2 = {}^t(-3, 5, -4)$. Si ha quindi:

$$d(r_1, r_2) = d(P_1, P_2) = \sqrt{29}.$$

Cercando le intersezioni di t con r_1 e r_2 si trovano i punti $Q_1 = {}^t(-2, -1, -3)$ e $Q_2 = {}^t(-1, 6, -4)$.
Per calcolare il volume V del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2, calcoliamo i seguenti vettori: $P_2 - P_1 = {}^t(-2, 4, -3)$, $Q_1 - P_1 = {}^t(-1, -2, -2)$, $Q_2 - P_1 = {}^t(0, 5, -3)$. Si ha quindi

$$V = \frac{1}{6} \,|\det \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix} | = \frac{29}{6}.$$

L'area A del triangolo di vertici P_1, Q_1, Q_2 si può calcolare utilizzando il prodotto vettoriale dei vettori $Q_1 - P_1 = {}^t(-1, -2, -2)$ e $Q_2 - P_1 = {}^t(0, 5, -3)$. Si ha:

$$u = (Q_1 - P_1) \times (Q_2 - P_1) = {}^t(16, -3, -5).$$

L'area cercata è dunque la metà della norma del vettore u:

$$A = \frac{1}{2} \, \|u\| = \sqrt{\frac{145}{2}}$$