Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Prof. F. Bottacin

Appello — 21 luglio 2008

Esercizio 1. Siano A, B e X tre insiemi qualsiasi.
(a) Si dimostri che

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad X \setminus B \subseteq X \setminus A.$$

Vale anche l'implicazione opposta?
(b) Si dimostri che $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
(c) È vero che $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$?
(*tutte le risposte devono essere giustificate*)

Esercizio 2. (a) Sia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da

$$f(r,s) = 3^r\, 4^s.$$

Si dica se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
Si calcoli inoltre $f(A)$, ove $A = \{(1,0),(0,1),(1,1),(2,1),(1,2)\}$.
(b) Sia $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $g(z) = z^2 - 1$. Si stabilisca se g è iniettiva, suriettiva, biiettiva. Si calcoli inoltre $g^{-1}(B)$, ove $B = \{-1,0,1,2,3\}$.

Esercizio 3. Si dimostri che la somma dei primi n multipli di 4 (partendo da 4 stesso) è uguale a $2n(n+1)$.

Esercizio 4. Utilizzando l'algoritmo di Euclide si calcoli il MCD d dei due numeri $a = 786$ e $b = 330$. Si determinino poi due interi α e β tali che $d = a\,\alpha + b\,\beta$.

Esercizio 5. Sia $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme di n elementi, ordinati come indicato. Definiamo una operazione binaria $\star$ ponendo

$$a_i \star a_j = a_r, \text{ ove } r = \min\{i,j\}.$$

Si stabilisca se questa operazione gode delle proprietà associativa e commutativa e se esiste un elemento neutro. Si determini infine per quali elementi di A esiste un inverso.

Esercizio 6. Sia $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sul prodotto cartesiano $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ si definisca una relazione $\sim$ ponendo

$$(a,b) \sim (a',b') \text{ se e solo se } ab' - a'b = 0.$$

(a) Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
(b) Nell'insieme $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ si definisca una operazione $\star$ ponendo

$$(a,b) \star (c,d) = (ad + bc, bd).$$

Si dimostri che la relazione $\sim$ è compatibile con l'operazione $\star$.
(c) Indichiamo con Q l'insieme quoziente $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / \sim$. Si dimostri che la funzione $f : Q \to \mathbb{Q}$ ottenuta associando ad una coppia $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ il numero razionale $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ è ben definita ed è iniettiva.

Esercizio 7. (a) Sull'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si definisca una relazione $\preceq$ ponendo

$$(a,b) \preceq (c,d) \text{ se } 2a + 5b \leq 2c + 5d.$$

Si stabilisca se $\preceq$ è una relazione d'ordine. In caso affermativo si dica se si tratta di un ordine totale e di un buon ordinamento.

(b) Sull'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si definisca una relazione $\sqsubseteq$ ponendo

$$(a, b) \sqsubseteq (c, d) \text{ se } 2^a\, 5^b \leq 2^c\, 5^d.$$

Si stabilisca se $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine. In caso affermativo si dica se si tratta di un ordine totale e di un buon ordinamento.

Esercizio 8. Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 3x \equiv 4 \bmod 7 \\ 2x \equiv 6 \bmod 10 \\ 5x \equiv 2 \bmod 11 \end{cases}$$

Esercizio 9. Si calcoli il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & t \end{pmatrix}$$

e si dica per quali valori di $t \in \mathbb{Q}$ il rango di A non è 4.

Esercizio 10. Si determini una matrice quadrata A di ordine 2 tale che i suoi autovalori siano 2 e 3 e i corrispondenti autovettori siano $v = (1, 2)$ (relativo all'autovalore 2) e $w = (3, 5)$ (relativo all'autovalore 3).