Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

GEOMETRIA II

Prof. F. Bottacin

Appello — 21 luglio 2008

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare simmetrica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
(a) Si stabilisca se g è degenere o non-degenere.
(b) Si determini una base ortogonale $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ di V, la segnatura e l'indice d'inerzia di g.
(c) Si determini una matrice P tale che ${}^tPAP$ sia diagonale.
(d) Si stabilisca se esiste una base di V rispetto alla quale g abbia matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Si ha $\det A = 36$, quindi g è non-degenere.
Una base ortogonale di V è:

$$w_1 = v_4, \quad w_2 = -\frac{1}{3}\, v_1 + v_4, \quad w_3 = \frac{5}{3}\, v_1 + 3v_2 + v_4, \quad w_4 = 5v_1 + 9v_2 + 17v_3 + 3v_4.$$

La matrice di g rispetto alla base $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ è

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -306 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che la segnatura di g è $(2, 2)$ e l'indice d'inerzia è 0.
La matrice P cercata è la matrice di cambiamento di base, cioè è la matrice le cui colonne sono le coordinate dei vettori w_i rispetto alla base v_j:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e si ha ${}^tPAP = A'$.
La matrice B ha anch'essa segnatura $(2, 2)$ (cioè indice d'inerzia 0, come si vede facilmente considerando la base ortogonale costituita dai vettori $v_1 + v_3$, $v_1 - v_3$, $v_2 + v_4$ e $v_2 - v_4$). Ciò significa che esiste una base di V rispetto alla quale B è la matrice di g.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 8 & 0 & -12 \\ 3 & 3 & 2 & -6 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.
(a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ.
(b) Si determinino gli autovalori di ϕ e i relativi autospazi.
(c) Si determinino (se esistono) una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1}AP$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di ϕ è

$$\det(A - x) = (x - 2)^3(x + 1),$$

da cui si deduce che gli autovalori di ϕ sono 2 (con molteplicità 3) e -1 (con molteplicità 1). L'autospazio relativo all'autovalore 2 ha dimensione 3 ed è generato dai vettori $v_1 = {}^t(0, 0, 1, 0)$, $v_2 = {}^t(2, 0, 0, 1)$ e $v_3 = {}^t(-1, 1, 0, 0)$. L'autospazio relativo all'autovalore -1 ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $v_4 = {}^t(-1, 2, 1, 1)$. La matrice A è dunque diagonalizzabile e le matrici P e D cercate sono

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Nello spazio affine euclideo $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, con coordinate x, y, z, si consideri l'affinità f data da:

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Si mostri che f è una rotazione e si determinino l'asse e l'angolo di rotazione.

Soluzione. L'applicazione lineare sottostante all'affinità f è data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}$$

Si verifica subito che ${}^tAA = \mathbf{1}$ e $\det A = 1$, il che significa che A è la matrice di una rotazione. L'asse di rotazione è il luogo dei punti X tali che $f(X) = X$. Ponendo $X = {}^t(x, y, z)$, l'equazione $f(X) = X$ equivale al seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 2x - 4z + 5 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

che rappresenta una retta r. Queste sono quindi le equazioni cartesiane dell'asse di rotazione. Un vettore parallelo alla retta r è il vettore ${}^t(2, 0, 1)$, pertanto il vettore $v = {}^t(0, 1, 0)$ risulta essere ortogonale all'asse di rotazione. Osserviamo ora che $Av = -v$; ciò significa che f è una rotazione di un angolo piatto attorno alla retta r.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale reale $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si consideri il piano π di equazione $x + y - 2z = 0$.
(a) Determinare gli angoli formati da π con il piano σ di equazione $x - y + 2z - 2 = 0$ e con la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

(b) Si consideri l'applicazione ϕ data dalla proiezione ortogonale su π. Si scriva la matrice di ϕ rispetto al sistema di riferimento canonico di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.
(c) Si determini l'equazione della retta passante per il punto $P = {}^t(3, 1, -2)$ e parallela alla retta determinata dall'intersezione dei piani π e σ.

Soluzione. Un vettore normale al piano π è $n_\pi = {}^t(1, 1, -2)$ e un vettore normale al piano σ è $n_\sigma = {}^t(1, -1, 2)$. L'angolo α tra i piani π e σ è uguale all'angolo compreso tra i vettori n_π e n_σ. Si ha quindi

$$\cos\alpha = \frac{n_\pi \cdot n_\sigma}{\|n_\pi\| \, \|n_\sigma\|} = -\frac{2}{3}.$$

Un vettore parallelo alla retta r è $v_r = {}^t(1, 5, 2)$. Se β è l'angolo formato dal piano π e dalla retta r e γ è l'angolo formato dai vettori n_π e v_r, si ha $\beta + \gamma = \pi/2$, quindi si ha:

$$\sin\beta = \cos\gamma = \frac{n_\pi \cdot v_r}{\|n_\pi\| \, \|v_r\|} = \frac{\sqrt{5}}{15}.$$

Sia $X_0 = {}^t(x_0, y_0, z_0)$ un punto qualsiasi e sia s_0 la retta per X_0 perpendicolare al piano π (cioè parallela al vettore n_π). Il punto $\phi(X_0)$ è il punto di intersezione tra la retta s_0 e il piano π. Sviluppando i calcoli di trova

$$\phi(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{5x_0 - y_0 + 2z_0}{6} \\ \frac{-x_0 + 5y_0 + 2z_0}{6} \\ \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice di ϕ è quindi

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dato che i vettori n_σ e n_π sono perpendicolari ai piani σ e π, rispettivamente, la retta $\sigma \cap \pi$ è parallela al vettore $w = n_\sigma \times n_\pi$ (il quale è ortogonale a entrambi i vettori n_σ e n_π). Si tratta quindi di determinare la retta passante per il punto P e parallela al vettore w. Sviluppando i calcoli si ha:

$$w = n_\sigma \times n_\pi = {}^t(0, 4, 2)$$

e quindi la retta cercata ha le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 3 + 0 \\ y = 1 + 4t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

Le equazioni cartesiane di questa retta sono le seguenti:

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$