Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Prof. F. Bottacin

Appello — 17 settembre 2008

Esercizio 1. Siano A, B e C tre insiemi qualsiasi.
(a) Si dimostri che
$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C).$$
(b) Si stabilisca se vale anche la seguente uguaglianza:
$$(A \triangle B) \cup C = (A \cup C) \triangle (B \cup C).$$
(c) Si dimostri che
$$A \triangle B = A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset.$$

Esercizio 2. (a) Si dia un esempio di una funzione biiettiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ diversa dalla funzione identica.
(b) Si dia un esempio di una funzione biiettiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ diversa dalla funzione identica.
(c) Si dia un esempio di una funzione biiettiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.
(d) Si dia un esempio di una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ suriettiva ma non iniettiva.

Esercizio 3. Si considerino le seguenti funzioni:
$$\begin{aligned} f &: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad f(x) = 3(x-1)/2 + 2 \\ g &: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad g(y) = 5(1-y)/3 - 2 \end{aligned}$$
(a) Si dimostri che f e g sono biiettive.
(b) Si calcolino le funzioni f^{-1}, g^{-1} e $g \circ f$.
(c) L'inversa di $g \circ f$ è $g^{-1} \circ f^{-1}$?

Esercizio 4. Ad una regata partecipano dieci imbarcazioni.
(a) In quanti modi diversi si possono assegnare i numeri da 1 a 10 alle dieci imbarcazioni?
(b) Dato che cinque imbarcazioni sono bianche e le altre cinque nere, viene stabilito che alle imbarcazioni bianche devono essere assegnati numeri pari mentre alle imbarcazioni nere numeri dispari. Secondo questa regola, in quanti modi diversi si possono assegnare i numeri da 1 a 10 alle dieci imbarcazioni?
(c) Quanti sono i possibili ordini di arrivo, se si restringe l'attenzione solo alle prime tre imbarcazioni che terminano la gara?
(d) Quanti sono gli anagrammi (non necessariamente di senso compiuto) della parola IMBARCAZIONI?

Esercizio 5. Si determini l'inverso di 743 modulo 3753.

Esercizio 6. Sia $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un insieme di n elementi, ordinati come indicato. Definiamo una operazione binaria $\star$ ponendo
$$a_i \star a_j = a_r, \text{ ove } r = \max\{i, j\}.$$
Si stabilisca se questa operazione gode delle proprietà associativa e commutativa e se esiste un elemento neutro. Si determini infine per quali elementi di A esiste un inverso.

Esercizio 7. Sia A un insieme con n elementi e sia $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A. In $\mathcal{P}(A)$ si definisca una relazione $\sim$ ponendo $X \sim Y$ se esiste una funzione biiettiva $f : X \to Y$.

(a) Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
(b) Sia $a \in A$. Si descriva la classe di equivalenza di $\{a\}$.
(c) Si descriva la classe di equivalenza di A.
(c) Si dimostri che l'insieme quoziente $\mathcal{P}(A)/\sim$ possiede $n+1$ elementi.

Esercizio 8. Sia A un insieme finito totalmente ordinato. Una funzione $f : A \to A$ si dice *crescente* se

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \leq f(b).$$

Si dimostri che l'unica funzione $f : A \to A$ crescente e iniettiva è l'identità.

Esercizio 9. Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 4x \equiv 2 \bmod 10 \\ 4x \equiv 2 \bmod 11 \\ 4x \equiv 2 \bmod 7 \end{cases}$$

Esercizio 10. Si dica se esiste un valore di t per cui la seguente matrice abbia rango 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & t & 3 & -2 \\ 3 & 2t-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 11. Si risolva, con il metodo di Cramer, il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ 5x + 3y + 2z = 3 \\ 9x + 2y + 6z = 1 \end{cases}$$