Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

GEOMETRIA II

Prof. F. Bottacin

Appello — 25 settembre 2008

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ dotato dell'applicazione bilineare simmetrica g di matrice

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -11 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

(a) Si verifichi che g è non-degenere e si determini una base ortogonale $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di V.

(b) Si determini la segnatura e l'indice d'inerzia di g. Si determini inoltre una matrice triangolare superiore P tale che ${}^tPGP$ sia diagonale.

(c) Si dica qual è la dimensione di un sottospazio isotropo massimale di V e si determini un tale sottospazio. Si dica inoltre se un sottospazio isotropo massimale di V è unico oppure no. (Ricordiamo che un sottospazio U di V è detto *isotropo* se $U \subseteq U^\perp$)

(d) Sia U il sottospazio isotropo massimale determinato nel punto precedente. Si determini un sottospazio W di V tale che $U^\perp = U \oplus W$.

Soluzione. Si ha $\det G = -24$, quindi g è non-degenere.
Una base ortogonale di V è:

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = e_2, \quad v_3 = -2e_1 + e_3, \quad v_4 = 4e_1 - e_2 - 2e_3 + e_4.$$

La matrice di g rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è

$$G' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che la segnatura di g è $(1, 3)$ e l'indice d'inerzia è -2.
La matrice P cercata è la matrice di cambiamento di base, cioè è la matrice le cui colonne sono le coordinate dei vettori v_i rispetto alla base e_j:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si ha ${}^tPGP = G'$.
Poiché g è indefinita esistono vettori isotropi. Ad esempio, il vettore $u = v_2 + 2v_3 = -4e_1 + e_2 + 2e_3$ è isotropo, quindi il sottospazio U da esso generato è un sottospazio isotropo.
Notiamo che, poiché la segnatura di g è $(1, 3)$, esiste un sottospazio tridimensionale V' di V su cui la forma bilineare g è definita negativa. Da ciò segue che non possono esistere sottospazi isotropi di dimensione ≥ 2 (altrimenti V' dovrebbe contenere dei vettori isotropi, il che non è possibile dato che g, ristretta a V' è definita negativa). Si conclude quindi che i sottospazi isotropi massimali hanno dimensione 1, quindi il sottospazio $U = \langle u \rangle$ è un sottospazio isotropo massimale.

Un tale sottospazio non è unico: ad esempio, il vettore $u' = v_1 + \sqrt{3}\,v_3$ è anch'esso isotropo e quindi genera un sottospazio isotropo massimale $U' \neq U$.
Ricordiamo che si ha $\dim U^\perp = \dim V - \dim U = 3$ e che $u \in U \subseteq U^\perp$. Poiché $u = v_2 + 2v_3$, i vettori v_1 e v_4 sono ortogonali a u, quindi $v_1, v_4 \in U^\perp$. Possiamo dunque scrivere

$$U^\perp = \langle u, v_1, v_4\rangle = \langle u\rangle \oplus \langle v_1, v_4\rangle = U \oplus W,$$

ove $W = \langle v_1, v_4\rangle$.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ -3 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.
(a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ.
(b) Si determinino gli autovalori di ϕ ed i relativi autovettori.
(c) Si dica se la matrice A è diagonalizzabile. In caso affermativo si determinino una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1}AP$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di ϕ è

$$\det(A - x) = (x-2)^3(x-3),$$

da cui si deduce che gli autovalori di ϕ sono 2 (con molteplicità 3) e 3 (con molteplicità 1).
L'autospazio relativo all'autovalore 3 ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $v_1 = {}^t(1, 0, 3, 0)$.
Tuttavia, risolvendo il sistema lineare per determinare gli autovettori relativi all'autovalore 2, si trova

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 + x_2 \\ x_4 = x_1 - x_2 \\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ qualunque} \end{cases}$$

da cui si deduce che l'autospazio relativo all'autovalore 2 ha dimensione 2, e una sua base è data dai vettori $v_2 = {}^t(1, 0, -1, 1)$ e $v_3 = {}^t(0, 1, 1, -1)$. Poiché la molteplicità algebrica dell'autovettore 2 era 3, si conclude che la matrice A (e quindi anche ϕ) non è diagonalizzabile (non esiste una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A).

Esercizio 3. Nello spazio affine euclideo $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le due rette

$$r_1 : \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Mostrare che r_1 e r_2 sono sghembe e calcolarne la reciproca distanza.
(b) Trovare l'unica retta n incidente sia r_1 che r_2 e ortogonale ad entrambe. Trovare i punti $P_1 = r_1 \cap n$ e $P_2 = r_2 \cap n$.
(c) Trovare l'unica retta t passante per il punto $Q = {}^t(2, 2, -2)$ ed incidente sia r_1 che r_2. Determinare i punti $Q_1 = r_1 \cap t$ e $Q_2 = r_2 \cap t$.
(d) Calcolare il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2 e l'area del triangolo di vertici P_1, Q_1, Q_2.

Soluzione. Le rette r_1 e r_2 non sono incidenti (non hanno punti in comune). Inoltre r_1 è parallela al vettore $v_1 = {}^t(1, 1, 1)$ mentre r_2 è parallela al vettore $v_2 = {}^t(1, -1, 1)$, quindi r_1 e r_2 non sono parallele: esse sono dunque sghembe. Un punto appartenente a r_1 è $A_1 = {}^t(2, 1, 0)$. Un punto appartenente a r_2 è $A_2 = {}^t(-2, 0, -2)$. Sia $u = A_1 - A_2 = {}^t(4, 1, 2)$. Allora la distanza tra r_1 e r_2 può essere calcolata mediante la seguente formula:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|u \cdot (v_1 \times v_2)|}{\|v_1 \times v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2}.$$

Per trovare la retta n consideriamo il generico punto $A = {}^t(t+2, t+1, t)$ di r_1 e il generico punto $B = {}^t(h-2, -h, h-2)$ di r_2. Richiediamo che il vettore $B - A$ sia ortogonale sia a v_1 che a v_2. Si ottiene un sistema lineare la cui soluzione è data da $t = -2$ e $h = 1$. In corrispondenza di questi valori si hanno i punti $A = {}^t(0, -1, -2)$ di r_1 e $B = {}^t(-1, -1, -1)$ di r_2: la retta n cercata è la retta passante per A e B. Si trova

$$n : \begin{cases} y + 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$$

I punti P_1 e P_2 cercati sono, rispettivamente, i punti A e B trovati prima: $P_1 = {}^t(0, -1, -2)$, $P_2 = {}^t(-1, -1, -1)$.
Per trovare la retta t, consideriamo il fascio di piani di asse r_1

$$\lambda(x - z - 2) + \mu(y - z - 1) = 0$$

e imponiamo la condizione di passaggio per il punto Q. Si trova così il seguente piano:

$$\pi : -3x + 2y + z + 4 = 0.$$

Questo piano interseca la retta r_2 nel punto $Q_2 = {}^t(0, -2, 0)$. La retta t cercata è quella passante per i punti Q e Q_2:

$$t : \begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Naturalmente bisogna controllare che tale retta intersechi effettivamente la retta r_1 (potrebbero anche essere parallele). Si trova che

$$Q_1 = t \cap r_1 = {}^t(1, 0, -1).$$

Infine, per calcolare il volume V del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2, calcoliamo i seguenti vettori: $P_2 - P_1 = {}^t(-1, 0, 1)$, $Q_1 - P_1 = {}^t(1, 1, 1)$, $Q_2 - P_1 = {}^t(0, -1, 2)$. Si ha quindi

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{3}.$$

L'area A del triangolo di vertici P_1, Q_1, Q_2 si può calcolare utilizzando il prodotto vettoriale dei vettori $Q_1 - P_1 = {}^t(1, 1, 1)$ e $Q_2 - P_1 = {}^t(0, -1, 2)$. Si ha:

$$u = (Q_1 - P_1) \times (Q_2 - P_1) = {}^t(3, -2, -1).$$

L'area cercata è dunque la metà della norma del vettore u:

$$A = \frac{1}{2} \|u\| = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ si considerino le due famiglie di sottovarietà lineari

$$\pi_\lambda : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + (2+\lambda)x_3 = 0 \\ x_2 + \lambda x_4 = 2 \end{cases} \qquad r_\lambda : \begin{cases} x_1 - x_2 + (2\lambda+1)x_3 + (\lambda+1)x_4 = -\lambda - 1 \\ 2x_1 + 2\lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - \lambda x_4 = \lambda \end{cases}$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.
(a) Si determinino, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, le dimensioni di π_λ e r_λ.
(b) Si dica per quali valori di λ le sottovarietà π_λ e r_λ sono incidenti, parallele oppure sghembe.
(c) Nel caso in cui $\lambda = 2$, si scrivano le equazioni della sottovarietà generata da π_λ e r_λ (cioè, della più piccola sottovarietà lineare di $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ che contiene π_λ e r_λ).

Soluzione. La matrice dei coefficienti delle indeterminate relativa alle equazioni di π_λ è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 2 per ogni valore di λ. Da ciò segue che π_λ ha dimensione $4-2=2$, per ogni λ.
La matrice dei coefficienti delle indeterminate relativa alle equazioni di r_λ è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\lambda+1 & \lambda+1 \\ 2 & 0 & 2\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Mediante operazioni elementari sulle righe questa matrice si trasforma in

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\lambda+1 & \lambda+1 \\ 0 & 2 & -2\lambda-2 & -2\lambda-1 \\ 0 & 0 & -2\lambda-1 & -2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 3 per $\lambda \neq -1/2$. Da ciò segue che r_λ ha dimensione $4-3=1$, per $\lambda \neq -1/2$.
Per $\lambda = -1/2$, si verifica che le tre equazioni di r_λ sono linearmente dipendenti e che solo due di esse sono linearmente indipendenti. Da ciò segue che, per $\lambda = -1/2$, r_λ ha dimensione $4-2=2$.
Studiamo ora l'intersezione $\pi_\lambda \cap r_\lambda$. Si tratta di mettere a sistema le due equazioni di π_λ con le tre equazioni di r_λ. Con operazioni elementari sulle righe, nell'ipotesi che $\lambda \neq -1/2$, la matrice completa del sistema risultante può essere trasformata nella seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\lambda+1 & \lambda+1 & -\lambda-1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda^2-\lambda-6 \end{pmatrix}$$

Notiamo che la matrice incompleta ha rango 4, per ogni valore di λ, mentre la matrice completa ha rango 5 per $\lambda \neq 2$, $\lambda \neq -3/2$. Quindi per $\lambda \neq 2$, $\lambda \neq -3/2$ tale sistema non ammette soluzioni, quindi le due varietà non sono incidenti, mentre per $\lambda = 2$, $\lambda = -3/2$ le due varietà sono incidenti (in un punto). Si verifica poi che anche per $\lambda = -1/2$ le due varietà sono incidenti.
Il sottospazio direttore di π_λ è generato dai due vettori $v_1 = {}^t(-1-\lambda/2, 0, 1, 0)$ e $v_2 = {}^t(-\lambda/2, -\lambda, 0, 1)$, mentre, se $\lambda \neq -1/2$, il sottospazio direttore di r_λ è generato dal vettore $w = {}^t(\lambda - 1/2, -1/2, -1, 1)$. Se ne deduce che r_λ non è mai parallela a π_λ, quindi, quando non sono incidenti, le due varietà sono sghembe.
Per $\lambda = 2$ le due varietà diventano

$$\pi = \pi_2 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 2 \end{cases} \qquad r = r_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -3 \\ 2x_1 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Il sottospazio direttore di π è generato dai due vettori $v_1 = {}^t(-2, 0, 1, 0)$ e $v_2 = {}^t(-1, -2, 0, 1)$, mentre il sottospazio direttore di r è generato dal vettore $w = {}^t(3, -1, -2, 2)$. Le due varietà sono incidenti nel punto $A = {}^t(4, 0, -2, 1)$, quindi la sottovarietà generata da π e r è

$$W = A + \langle v_1, v_2, w \rangle,$$

le cui equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2\alpha - \beta + 3\gamma \\ x_2 = -2\beta - \gamma \\ x_3 = -2 + \alpha - 2\gamma \\ x_4 = 1 + \beta + 2\gamma \end{cases}$$

e la cui equazione cartesiana è

$$3x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 - 1 = 0.$$