

MATEMATICA DISCRETA

PROF. F. BOTTACIN

Appello — 13 novembre 2008

Esercizio 1. Siano A , B e C tre insiemi qualsiasi.

(a) Si dimostri che vale la seguente uguaglianza:

$$(B \setminus (A \cup C)) \cup ((A \cap C) \setminus B) = (B \cup (A \cap C)) \setminus ((B \cap A) \cup (B \cap C))$$

(b) Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione qualunque e siano X e Y due sottoinsiemi di B . Si dimostri che si ha:

$$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y).$$

Esercizio 2. Determinare (se possibile) due numeri interi x e y tali che si abbia

$$2178x - 846y = 594.$$

Esercizio 3. In $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ si consideri il seguente sistema di equazioni lineari, nelle incognite X , Y e Z :

$$\begin{cases} aX + Z = 0 \\ 6X + Y + aZ = 0 \\ 3X + Y = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini per quali valori di $a \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ questo sistema ammette più di una soluzione.

(b) Si risolva tale sistema per $a = 4$.

Esercizio 4. Indichiamo con $M_2(\mathbb{Z})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti in \mathbb{Z} .

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e indichiamo con \mathcal{M} l'insieme delle matrici che commutano con A :

$$\mathcal{M} = \{X \in M_2(\mathbb{Z}) : AX = XA\}.$$

(a) Si descrivano esplicitamente tutti gli elementi di \mathcal{M} .

(b) Si dica se l'insieme \mathcal{M} è stabile rispetto all'operazione di somma di matrici.

(c) Si dica se l'insieme \mathcal{M} è stabile rispetto all'operazione di prodotto di matrici.

Esercizio 5. Nell'insieme $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 15\}$ si consideri la relazione \sqsubseteq definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \text{ se } a = 0 \text{ oppure } b - a = 3h, \text{ per qualche } h \in \mathbb{N}.$$

(a) Si dimostri che \sqsubseteq è una relazione d'ordine.

(b) Si dica se l'insieme (A, \sqsubseteq) è totalmente ordinato.

(c) Si disegni il diagramma di Hasse di (A, \sqsubseteq) .

(d) Si determinino gli eventuali elementi minimali e il minimo di (A, \sqsubseteq) .

(e) Si determinino gli eventuali elementi massimali e il massimo di (A, \sqsubseteq) .

(f) Si determini, se esiste, l'estremo inferiore del sottoinsieme $\{4, 9\}$ di (A, \sqsubseteq) .

(g) Si determini, se esiste, l'estremo superiore del sottoinsieme $\{6, 7\}$ di (A, \sqsubseteq) .

Esercizio 6. Nell'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali si definisca un'operazione binaria \star ponendo

$$a \star b = 2ab - 4a - 4b + 10.$$

- (a) Si verifichi che l'operazione \star gode delle proprietà associativa e commutativa.
- (b) Si determini (se esiste) un elemento neutro per l'operazione \star .
- (c) Si determini quali elementi $a \in \mathbb{Q}$ sono invertibili per l'operazione \star e se ne determini il loro inverso.

Esercizio 7. Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 6x \equiv 4 \pmod{8} \\ 5x \equiv 1 \pmod{7} \\ 4x \equiv 6 \pmod{10} \end{cases}$$

Esercizio 8. Si stabilisca se le seguenti sono delle relazioni di equivalenza. In caso di risposta affermativa, si descriva la classe di equivalenza del numero 1.

- (a) $a, b \in \mathbb{Z}$ e si pone

$$a \sim b \text{ se } 5a + 7b = 2h, \text{ per qualche } h \in \mathbb{Z}.$$

- (b) $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ e si pone

$$a \sim b \text{ se } ab \geq b.$$

- (c) $a, b \in \mathbb{Z}$ e si pone

$$a \sim b \text{ se } a = b \text{ oppure } ab < 0.$$