

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

PROFF. F. BOTTACIN, C. DELIZIA

**Appello — 8 gennaio 2009**

---

**IMPORTANTE:** indicare l'esame che si intende sostenere e fare **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

Mat. Discreta e Logica Matem. (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3**

Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9**

---

**Esercizio 1.** (a) Si scriva la tavola di verità della seguente formula ben formata e si determini se essa è una tautologia:

$$P = (\neg A \rightarrow \neg B) \wedge (B \rightarrow (A \rightarrow B))$$

(b) Si scriva una formula equivalente a  $P$  usando solo i connettivi  $\neg$  e  $\wedge$ .

(c) Si scriva una formula ben formata  $Q$  che abbia la seguente tavola di verità:

$A$	$B$	$C$	$Q$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

**Esercizio 2.** Si determinino una formula in forma normale congiuntiva ed una in forma normale disgiuntiva equivalenti alla seguente formula ben formata:

$$(A \rightarrow \neg B) \wedge \neg(B \rightarrow A \wedge C) \vee (C \rightarrow A)$$

**Esercizio 3.** Si determini una forma normale prenessa della seguente formula ben formata:

$$\exists x A(x) \wedge \neg \exists y B(y) \rightarrow (\neg \forall x A(x) \rightarrow \forall y B(y))$$

**Esercizio 4.** (a) Si dimostri che, dati tre insiemi qualsiasi  $A$ ,  $B$  e  $C$ , si ha:

$$(A \Delta B) \setminus (A \cap C) = (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus A)$$

(b) Si dimostri che:

$$A \cap B = \emptyset, \forall B \Leftrightarrow A = \emptyset$$

**Esercizio 5.** Si individui il più piccolo intero positivo  $n$  che si rappresenta in base 7 con 5 cifre a due a due distinte, e si rappresenti  $n$  in base 8.

**Esercizio 6.** Si considerino le applicazioni:

$$h : x \in 5\mathbb{N} \mapsto \frac{x}{5} + 1 \in \mathbb{N}, \quad k : t \in \mathbb{N} \mapsto 4|t - 1| \in 4\mathbb{N}.$$

- Si calcoli:

$$h(10\mathbb{N}^*) =$$

$$h^{-1}(\{0, 2, 8, 11\}) =$$

$$k(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}) =$$

$$k^{-1}(4\mathbb{N} \setminus \{0, 4, 12\}) =$$

- Si stabilisca se  $h$  è suriettiva.

- Si stabilisca se  $k$  è iniettiva.

- Si determini la composta  $k \circ h$ .

- Si verifichi che  $k \circ h$  è biettiva e se ne individui l'inversa.

**Esercizio 7.** Nell'anello  $M_2(\mathbb{Z}_6)$  delle matrici quadrate di ordine 2 su  $\mathbb{Z}_6$  si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_6 \right\}.$$

- Si dimostri che  $A$  è un sottoanello unitario di  $M_2(\mathbb{Z}_6)$ .

- Si determinino tutti gli elementi invertibili di  $A$ .

**Esercizio 8.** Nell'insieme  $A = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$  dei numeri naturali minori di 12 si consideri la relazione  $\sqsubseteq$  definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } 5a < 2b.$$

- Si verifichi che  $\sqsubseteq$  è una relazione d'ordine in  $A$ .
- Si disegni il diagramma di Hasse di  $(A, \sqsubseteq)$ .
- Si stabilisca se  $(A, \sqsubseteq)$  è ben ordinato.
- Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di  $(A, \sqsubseteq)$ .
- Si determinino tutti i maggioranti in  $A$  del sottoinsieme  $\{1, 2\}$ .
- Si determini l'eventuale estremo superiore in  $A$  del sottoinsieme  $\{1, 2\}$ .

**Esercizio 9.** Si determini il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{Z}_5).$$

**Esercizio 10.** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

si determinino, se esistono, una matrice invertibile  $S$  e una matrice diagonale  $D$  tali che  $D = S^{-1}AS$ .

**Esercizio 11.** Si considerino i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^3$

$$v = (2, -1, 1), \quad w = (3, 2, -1).$$

Si dimostri che  $v$  e  $w$  sono linearmente indipendenti e si trovi un vettore  $u$  tale che i tre vettori  $u$ ,  $v$  e  $w$  formino una base di  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 12.** Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (2, -1, 0), \quad B = (4, 2, 1), \quad C = (3, -1, 2).$$

- Si determinino le equazioni cartesiane della retta  $r$  passante per  $A$  e  $B$ .
- Si determini l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per  $C$  e perpendicolare alla retta  $r$ .