Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Proff. F. Bottacin, C. Delizia

Appello — 22 gennaio 2009

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e fare **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Mat. Discreta e Logica Matem. (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9**

Esercizio 1. (a) Si scriva la tavola di verità della seguente formula ben formata e si determini se essa è una tautologia:

$$P = (A \wedge B) \to (\neg(B \to A) \to (A \vee B))$$

(b) Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\vee$.
(c) Si scriva una formula ben formata Q che abbia la seguente tavola di verità:

A	B	C	Q
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Esercizio 2. Si determinino una formula in forma normale congiuntiva ed una in forma normale disgiuntiva equivalenti alla seguente formula ben formata:

$$\neg(A \wedge \neg B) \to (C \vee (A \to C) \wedge B)$$

Esercizio 3. Si determini una forma normale prenessa della seguente formula ben formata:

$$(\exists x\, A(x) \to \exists y\, B(y)) \to (\forall x\, A(x) \to \exists y\, B(y) \vee \forall z\, C(z))$$

Esercizio 4. Si determini il più grande intero negativo che sia soluzione del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 6x \equiv 4 \pmod{10} \\ 4x \equiv 3 \pmod{7} \\ 5x \equiv 4 \pmod{11}. \end{cases}$$

Esercizio 5. Un parallelepipedo di legno misura $5 \times 7 \times 7$ cm ed è dipinto di blu sulla superficie esterna. Se viene suddiviso in 245 cubetti di 1 cm di lato ciascuno, quanti di questi avranno almeno una faccia dipinta di blu? (*giustificare la risposta*)

Esercizio 6. Si consideri la corrispondenza

$$f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} : y = \frac{x-1}{|x|+1} \right\}.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione.

- Si calcoli:

  $f(\mathbb{N}_d) =$

  $f^{-1}(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}) =$

- Si stabilisca se f è iniettiva.

- Si stabilisca se f è suriettiva.

- Considerata l'applicazione $g : t \in \mathbb{Z} \longmapsto 1 - |t| \in \mathbb{Z}$, si determini la composta $f \circ g$.

Esercizio 7. Si consideri, nell'insieme $3\mathbb{Z}$, l'operazione $\star$ definita ponendo

$$n \star m = n + m - 12$$

per ogni $n, m \in 3\mathbb{Z}$.

- Si provi che la struttura algebrica $(3\mathbb{Z}, \star)$ è un gruppo abeliano.

- Qual è l'elemento neutro di $(3\mathbb{Z}, \star)$?

- Se $n \in 3\mathbb{Z}$, qual'è il simmetrico di n in $(3\mathbb{Z}, \star)$?

- Si stabilisca se il sottoinsieme $6\mathbb{Z}$ è stabile in $(3\mathbb{Z}, \star)$, motivando la risposta.

- Si stabilisca se l'applicazione
$$f : a \in \mathbb{Z} \longmapsto 3a + 12 \in 3\mathbb{Z}$$
è un omomorfismo tra i gruppi $(\mathbb{Z}, +)$ e $(3\mathbb{Z}, \star)$.

Esercizio 8. Si consideri l'insieme $A = \{\, 10,\, 11,\, 12, \ldots, 99 \,\}$ dei numeri naturali a due cifre. Si stabilisca quali delle seguenti relazioni in A sono d'equivalenza, e per queste ultime si determini l'ordine del relativo insieme quoziente:

- $a \, \mathcal{R}_1 \, b \iff a$ e b hanno almeno una cifra in comune

- $a \, \mathcal{R}_2 \, b \iff$ la somma delle cifre di a è uguale alla somma delle cifre di b

- $a \, \mathcal{R}_3 \, b \iff a = b$ oppure il numero intero ab è dispari.

Esercizio 9. Si stabilisca se la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$$

è invertibile, ed in tal caso se ne determini la matrice inversa.

Esercizio 10. Determinare gli autovalori e gli autovettori della seguente matrice, e stabilire se essa è diagonalizzabile:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Esercizio 11. Si stabilisca se i tre vettori

$$v_1 = (-2, 1, 3), \qquad v_2 = (4, -1, -2), \qquad v_3 = (2, 1, 5)$$

formano una base di $\mathbb{R}^3$. In caso contrario si esprima uno di essi come combinazione lineare degli altri due.

Esercizio 12. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (0, 1, 2), \qquad B = (2, 0, 1), \qquad C = (1, 1, 3).$$

- Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per i punti A, B e C,
- Si determinino le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto B e perpendicolare al piano π.