Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Proff. F. Bottacin, C. Delizia

Appello — 13 febbraio 2009

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e fare **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Mat. Discreta e Logica Matem. (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9**

Esercizio 1. (a) Si scriva la tavola di verità della seguente formula ben formata e si determini se essa è una tautologia:

$$P = (A \vee (B \to A)) \to (B \to (A \wedge B))$$

(b) Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\to$.
(c) Si scriva una formula ben formata Q che abbia la seguente tavola di verità:

A	B	C	Q
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Esercizio 2. Si determinino una formula in forma normale congiuntiva ed una in forma normale disgiuntiva equivalenti alla seguente formula ben formata:

$$\neg((A \wedge \neg B) \to (C \to A \vee B)) \vee (B \to A)$$

Esercizio 3. Si determini una forma normale prenessa della seguente formula ben formata:

$$\neg\forall x\, A(x) \vee \exists y\, (B(y) \wedge C(z)) \to (\forall x\, (A(x) \wedge C(z)) \to \exists y\, B(y))$$

Esercizio 4. Si dimostri che, dati due sottoinsiemi qualsiasi B e C di un insieme A, si ha:

$$A \setminus (B \bigtriangleup C) = \big((A \setminus B) \setminus C\big) \cup (A \cap B \cap C)$$

Esercizio 5. Quanti sono i numeri naturali la cui rappresentazione in base 6 è costituita da una cifra 0, due cifre 1 e due cifre 2?

Esercizio 6. Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri interi $a = 649$ e $b = 990$, e si individuino due interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

Esercizio 7. Si consideri la corrispondenza

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \,:\, |x| = y - 3\}.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione.

- Si calcoli $f(\{-1, 0, 1\})$.

- Si stabilisca se f è iniettiva.

- Si stabilisca se f è suriettiva.

- Considerata l'applicazione $g : t \in \mathbb{Z} \longmapsto 1 - |t| \in \mathbb{Z}$, si determini la composta $f \circ g$.

Esercizio 8. Si consideri la struttura algebrica $(\mathbb{Z}_6, \star)$, dove l'operazione interna $\star$ è definita ponendo

$$a \star b = a + b + ab,$$

per ogni $a, b \in \mathbb{Z}_6$.

- Si compili la tabella moltiplicativa di $(\mathbb{Z}_6, \star)$.

- Si dimostri che $(\mathbb{Z}_6, \star)$ è un monoide commutativo.

- Si determinino tutti gli elementi simmetrizzabili di $(\mathbb{Z}_6, \star)$.

Esercizio 9. Nell'insieme $4\mathbb{N}$ si consideri la relazione $\sim$ definita ponendo

$$x \sim y \iff \text{l'ultima cifra di } x \text{ è uguale all'ultima cifra di } y.$$

- Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

- Si calcoli:

  $[20]_\sim =$

  $[32]_\sim =$

  $[44]_\sim =$

- Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $4\mathbb{N}/_\sim$?

- Si dimostri che l'assegnazione $\omega : [a]_\sim \in 4\mathbb{N}/_\sim \longmapsto [2a]_\sim \in 4\mathbb{N}/_\sim$ definisce un'applicazione.

- Si dimostri che ω è invertibile, e se ne determini l'inversa.

Esercizio 10. Si determini una matrice quadrata A, di ordine 2, avente i seguenti autovalori e autovettori:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -2 & v_1 = (2, 1) \\ \lambda_2 = 3 & v_2 = (1, 2) \end{array}$$

Esercizio 11. Dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (3, -1, 2, 5), \qquad v_2 = (-1, 2, 4, 7),$$

si verifichi che essi sono linearmente indipendenti. Si determinino poi due vettori v_3 e v_4 tali che i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 siano una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 12. Nello spazio affine tridimensionale, si consideri il piano π di equazione

$$\pi : 2x - y + z = 0$$

e la retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

- Si determini il punto A di intersezione tra la retta r e il piano π.

- Dato il punto $P = (1, -1, 1)$, si determini la sua proiezione ortogonale H sul piano π e la distanza di A da H.