Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

1$^{\text{o}}$ Appello — 16 giugno 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $U = \langle u_1, u_2 \rangle$, ove $u_1 = (-2, 1, 1, 3)$ e $u_2 = (0, -1, 2, 1)$. Si determini una base di un sottospazio W tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e si dica se un tale sottospazio W è unico. Dato il vettore $v_t = (t, 3, t-1, 1)$, si dica per quale valore di t si ha $v_t \in U$. Sia V il sottospazio vettoriale definito dalle equazioni $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ e $x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0$. Si determini una base di V e una base di $U \cap V$.

Esercizio 2. Dati i vettori $v_1 = (2, -3, 1, 0)$ e $v_2 = (0, -1, 1, -1)$, sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \langle v_1, v_2 \rangle$. Si scriva la matrice di una tale f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si dimostri che f possiede l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità (algebrica) 4, ma che essa non è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (0, -1, 1)$, $B = (-1, 0, 2)$ e $C = (1, -1, -4)$. Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C. Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC. Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $x + y - z = 0$. Si esprima il vettore $v = (3, -2, 4)$ come somma $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

1° Appello — 16 giugno 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (2, 0, 1)$, $B = (0, 3, -2)$ e $C = (1, 1, 0)$. Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C. Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC. Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $U = \langle u_1, u_2 \rangle$, ove $u_1 = (1, -3, -1, 2)$ e $u_2 = (2, 1, 2, -1)$. Si determini una base di un sottospazio W tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e si dica se un tale sottospazio W è unico. Dato il vettore $v_t = (t + 3, t - 4, -4, 5)$, si dica per quale valore di t si ha $v_t \in U$. Sia V il sottospazio vettoriale definito dalle equazioni $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ e $x_1 + 3x_2 + x_4 = 0$. Si determini una base di V e una base di $U \cap V$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $x - 2y + z = 0$. Si esprima il vettore $v = (2, 3, 1)$ come somma $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Dati i vettori $v_1 = (1, -2, 1, 0)$ e $v_2 = (-1, 0, 2, -1)$, sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \langle v_1, v_2 \rangle$. Si scriva la matrice di una tale f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si dimostri che f possiede l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità (algebrica) 4, ma che essa non è diagonalizzabile.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

1$^{\text{o}}$ Appello — 16 giugno 2009

Esercizio 1. Dati i vettori $v_1 = (3, 0, 1, 1)$ e $v_2 = (1, -1, 2, 1)$, sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \langle v_1, v_2\rangle$. Si scriva la matrice di una tale f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si dimostri che f possiede l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità (algebrica) 4, ma che essa non è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $2x - y - z = 0$. Si esprima il vettore $v = (-1, 3, 5)$ come somma $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (1, -2, 0)$, $B = (0, 1, -1)$ e $C = (2, 0, -3)$. Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C. Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC. Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $U = \langle u_1, u_2\rangle$, ove $u_1 = (-1, 2, 3, 1)$ e $u_2 = (2, 0, -1, 3)$. Si determini una base di un sottospazio W tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e si dica se un tale sottospazio W è unico. Dato il vettore $v_t = (t - 2, 4, t + 3, 5)$, si dica per quale valore di t si ha $v_t \in U$. Sia V il sottospazio vettoriale definito dalle equazioni $x_1 + x_2 = 0$ e $-x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$. Si determini una base di V e una base di $U \cap V$.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

1° Appello — 16 giugno 2009

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (-1, 2, 1)$, $B = (0, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 2)$. Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C. Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC. Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

Esercizio 2. Dati i vettori $v_1 = (-2, 4, 2, 0)$ e $v_2 = (3, -1, -2, 1)$, sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \langle v_1, v_2 \rangle$. Si scriva la matrice di una tale f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si dimostri che f possiede l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità (algebrica) 4, ma che essa non è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $3x - y + 2z = 0$. Si esprima il vettore $v = (3, -1, 1)$ come somma $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $U = \langle u_1, u_2 \rangle$, ove $u_1 = (1, -2, 3, 2)$ e $u_2 = (2, 1, 2, -1)$. Si determini una base di un sottospazio W tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e si dica se un tale sottospazio W è unico. Dato il vettore $v_t = (t - 3, -7, t + 3, 7)$, si dica per quale valore di t si ha $v_t \in U$. Sia V il sottospazio vettoriale definito dalle equazioni $2x_1 - x_3 = 0$ e $x_1 + x_3 - 4x_4 = 0$. Si determini una base di V e una base di $U \cap V$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

1º Appello — 16 giugno 2009

Esercizio 1. Dati i vettori $v_1 = (-1, 2, 1, -1)$ e $v_2 = (3, 0, -1, 3)$, sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \langle v_1, v_2 \rangle$. Si scriva la matrice di una tale f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si dimostri che f possiede l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità (algebrica) 4, ma che essa non è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $2x - y - 2z = 0$. Si esprima il vettore $v = (-1, 3, 2)$ come somma $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $U = \langle u_1, u_2 \rangle$, ove $u_1 = (-1, -2, 4, 1)$ e $u_2 = (3, 1, -1, 3)$. Si determini una base di un sottospazio W tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e si dica se un tale sottospazio W è unico. Dato il vettore $v_t = (t + 4, -3, 7, t + 8)$, si dica per quale valore di t si ha $v_t \in U$. Sia V il sottospazio vettoriale definito dalle equazioni $x_1 - x_2 = 0$ e $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Si determini una base di V e una base di $U \cap V$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (-2, -1, 1)$, $B = (1, 0, 2)$ e $C = (2, -1, 0)$. Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C. Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC. Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

1º Appello — 16 giugno 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $U = \langle u_1, u_2 \rangle$, ove $u_1 = (0, -2, 3, 4)$ e $u_2 = (2, 1, -2, 3)$. Si determini una base di un sottospazio W tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e si dica se un tale sottospazio W è unico. Dato il vettore $v_t = (-2, -t-3, t+6, 5)$, si dica per quale valore di t si ha $v_t \in U$. Sia V il sottospazio vettoriale definito dalle equazioni $x_1 - 2x_4 = 0$ e $2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$. Si determini una base di V e una base di $U \cap V$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $x + 2y - 2z = 0$. Si esprima il vettore $v = (2, -1, -1)$ come somma $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Dati i vettori $v_1 = (1, 2, 2, -1)$ e $v_2 = (3, -1, 1, 0)$, sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \langle v_1, v_2 \rangle$. Si scriva la matrice di una tale f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si dimostri che f possiede l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità (algebrica) 4, ma che essa non è diagonalizzabile.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (1, 3, -1)$, $B = (-1, 2, 0)$ e $C = (2, -1, 1)$. Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C. Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC. Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.