Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

3° Appello — 16 settembre 2009

Esercizio 1. Siano V e W due spazi vettoriali, sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V e sia $\{w_1, w_2, w_3\}$ una base di W. Indichiamo con $f : V \to W$ un'applicazione lineare tale che

$$f(v_1 - v_3) = w_1 - 2w_2 - 2w_3 \qquad f(v_1 - v_2 + v_3) = w_2$$
$$f(v_1 + v_3) = w_1 + 2w_2 \qquad f(v_1 - v_3 + v_4) = 5w_1 - 4w_3$$

(a) Si dica se f è univocamente determinata dalle condizioni date e si scriva la matrice di f rispetto alle basi date.

(b) Si determini una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Si determini $f^{-1}(w_1 + w_3)$.

(d) Si dica se esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g : W \to W$ sia l'identità (**Attenzione:** non è richiesto di determinare una tale g, ma solo di dire se essa esiste oppure no, giustificando la risposta).

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -2, 0)$, $u_2 = (-3, -6, 6, 2)$ e $u_3 = (0, 3, 0, -1)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di U e del sottospazio $U^\perp$ (ortogonale di U).

(b) Indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale sul sottospazio $U^\perp$. Si scriva la matrice di π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e si determinino il nucleo e l'immagine di π.

(c) Dato il vettore $v = (1, 1, 1, 1)$ si scriva v nella forma $v = v' + v''$, con $v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g definita da

$$g(v, w) = x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 + 2x_3y_1 - x_3y_2 + 4x_3y_3,$$

ove $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3)$.

(a) Si scriva la matrice di g rispetto alla base canonica.

(b) Si dica se g è non degenere e se essa è definita positiva, negativa o indefinita.

(c) Si determini una base ortogonale.

(d) Si stabilisca se esistono vettori isotropi e, in caso affermativo, se ne determini almeno uno.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (0, -1, 1)$, $B = (-1, 0, 2)$ e $C = (1, -1, -4)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.

(b) Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC.

(c) Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(d) Infine, dato il punto $P = (1, 1, 1)$, si determinino le distanze di P dalla retta r e dal piano π.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

3° Appello — 16 settembre 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (0, -1, 0, 3)$, $u_2 = (2, 0, 1, 0)$ e $u_3 = (6, -2, 3, 6)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di U e del sottospazio $U^\perp$ (ortogonale di U).

(b) Indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale sul sottospazio $U^\perp$. Si scriva la matrice di π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e si determinino il nucleo e l'immagine di π.

(c) Dato il vettore $v = (1, -1, 1, -1)$ si scriva v nella forma $v = v' + v''$, con $v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (2, 0, 1)$, $B = (0, 3, -2)$ e $C = (1, 1, 0)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.

(b) Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC.

(c) Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(d) Infine, dato il punto $P = (2, 2, 2)$, si determinino le distanze di P dalla retta r e dal piano π.

Esercizio 3. Siano V e W due spazi vettoriali, sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V e sia $\{w_1, w_2, w_3\}$ una base di W. Indichiamo con $f : V \to W$ un'applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} &f(v_1 + v_4) = w_1 + w_2 + 2w_3 \qquad && f(v_1 - v_2 - v_4) = w_3 \\ &f(v_1 - v_4) = -w_1 + w_2 && f(v_1 + v_3 + v_4) = w_1 + 2w_2 + w_3 \end{aligned}$$

(a) Si dica se f è univocamente determinata dalle condizioni date e si scriva la matrice di f rispetto alle basi date.

(b) Si determini una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Si determini $f^{-1}(w_1 + w_2)$.

(d) Si dica se esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g : W \to W$ sia l'identità (**Attenzione:** non è richiesto di determinare una tale g, ma solo di dire se essa esiste oppure no, giustificando la risposta).

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g definita da

$$g(v, w) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 - 2x_2y_3 - x_3y_1 - 2x_3y_2 + 3x_3y_3,$$

ove $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3)$.

(a) Si scriva la matrice di g rispetto alla base canonica.

(b) Si dica se g è non degenere e se essa è definita positiva, negativa o indefinita.

(c) Si determini una base ortogonale.

(d) Si stabilisca se esistono vettori isotropi e, in caso affermativo, se ne determini almeno uno.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

3º Appello — 16 settembre 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g definita da

$$g(v,w) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + 2x_3y_2 + x_3y_3,$$

ove $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3)$.

(a) Si scriva la matrice di g rispetto alla base canonica.

(b) Si dica se g è non degenere e se essa è definita positiva, negativa o indefinita.

(c) Si determini una base ortogonale.

(d) Si stabilisca se esistono vettori isotropi e, in caso affermativo, se ne determini almeno uno.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (1, -2, 0)$, $B = (0, 1, -1)$ e $C = (2, 0, -3)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.

(b) Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC.

(c) Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(d) Infine, dato il punto $P = (1, 1, 1)$, si determinino le distanze di P dalla retta r e dal piano π.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -2, 0)$, $u_2 = (-3, -6, 6, 2)$ e $u_3 = (0, 3, 0, -1)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di U e del sottospazio $U^\perp$ (ortogonale di U).

(b) Indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale sul sottospazio $U^\perp$. Si scriva la matrice di π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e si determinino il nucleo e l'immagine di π.

(c) Dato il vettore $v = (1, 1, 1, 1)$ si scriva v nella forma $v = v' + v''$, con $v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$.

Esercizio 4. Siano V e W due spazi vettoriali, sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V e sia $\{w_1, w_2, w_3\}$ una base di W. Indichiamo con $f : V \to W$ un'applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} f(v_1 - v_3 + v_4) &= 5w_1 - 4w_3 \qquad & f(v_1 - v_3) &= w_1 - 2w_2 - 2w_3 \\ f(v_1 - v_2 + v_3) &= w_2 \qquad & f(v_1 + v_3) &= w_1 + 2w_2 \end{aligned}$$

(a) Si dica se f è univocamente determinata dalle condizioni date e si scriva la matrice di f rispetto alle basi date.

(b) Si determini una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Si determini $f^{-1}(w_1 + w_3)$.

(d) Si dica se esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g : W \to W$ sia l'identità (**Attenzione:** non è richiesto di determinare una tale g, ma solo di dire se essa esiste oppure no, giustificando la risposta).

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

3$^{\text{o}}$ Appello — 16 settembre 2009

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (-1, 2, 1)$, $B = (0, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 2)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.

(b) Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC.

(c) Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(d) Infine, dato il punto $P = (2, 2, 2)$, si determinino le distanze di P dalla retta r e dal piano π.

Esercizio 2. Siano V e W due spazi vettoriali, sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V e sia $\{w_1, w_2, w_3\}$ una base di W. Indichiamo con $f : V \to W$ un'applicazione lineare tale che

$$f(v_1 - v_2 - v_4) = w_3 \qquad f(v_1 - v_4) = -w_1 + w_2$$
$$f(v_1 + v_3 + v_4) = w_1 + 2w_2 + w_3 \qquad f(v_1 + v_4) = w_1 + w_2 + 2w_3$$

(a) Si dica se f è univocamente determinata dalle condizioni date e si scriva la matrice di f rispetto alle basi date.

(b) Si determini una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Si determini $f^{-1}(w_1 + w_2)$.

(d) Si dica se esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g : W \to W$ sia l'identità (**Attenzione:** non è richiesto di determinare una tale g, ma solo di dire se essa esiste oppure no, giustificando la risposta).

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g definita da

$$g(v, w) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_1y_3 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 + 3x_3y_3,$$

ove $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3)$.

(a) Si scriva la matrice di g rispetto alla base canonica.

(b) Si dica se g è non degenere e se essa è definita positiva, negativa o indefinita.

(c) Si determini una base ortogonale.

(d) Si stabilisca se esistono vettori isotropi e, in caso affermativo, se ne determini almeno uno.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (0, -1, 0, 3)$, $u_2 = (2, 0, 1, 0)$ e $u_3 = (6, -2, 3, 6)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di U e del sottospazio $U^\perp$ (ortogonale di U).

(b) Indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale sul sottospazio $U^\perp$. Si scriva la matrice di π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e si determinino il nucleo e l'immagine di π.

(c) Dato il vettore $v = (1, -1, 1, -1)$ si scriva v nella forma $v = v' + v''$, con $v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$.