Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

3$^{\text{o}}$ Appello — 22 settembre 2009

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare che soddisfa la seguente uguaglianza:

$$g(v) \cdot w = v \cdot f(w), \qquad \forall v, w \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Calcolare $g(2, 3, 1)$.

(b) Scrivere la matrice di g rispetto alle basi canoniche.

(c) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(d) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(g)$ e una base di $\mathrm{Im}(g)$.

(e) Dimostrare che $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$ e che $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)^{\perp}$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & t \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Si determini il valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui -4 è un autovalore di A. Per tale valore di t si dica se A è invertibile, si determinino gli autovalori e gli autovettori della matrice A e si stabilisca se essa è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ (dotato del prodotto scalare usuale) sia V il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (2, 0, 1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 1)$ e $v_3 = (1, -2, -1, 0)$. Si scriva la matrice della restrizione del prodotto scalare al sottospazio V rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si determini inoltre una base ortonormale di V.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti

$$A = (-1, 2, -3), \quad B = (2, -1, 3), \quad C = (-1, 0, 0).$$

(a) Trovare l'equazione cartesiana del piano π contenente il triangolo ABC e calcolare l'area di tale triangolo.

(b) Determinare le equazioni cartesiane della retta s, perpendicolare al piano π e passante per il punto $P = (0, -3, 0)$.

(c) Calcolare la distanza tra la retta s e la retta r, passante per A e B.

(d) Determinare la proiezione ortogonale della retta OP sul piano π (ove O è il punto di coordinate $(0, 0, 0)$).

(e) Calcolare l'angolo fra il piano π e il piano XY.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

3º Appello — 22 settembre 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ (dotato del prodotto scalare usuale) sia V il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (0,-1,2,1)$ e $v_3 = (-1,0,1,2)$. Si scriva la matrice della restrizione del prodotto scalare al sottospazio V rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si determini inoltre una base ortonormale di V.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare che soddisfa la seguente uguaglianza:

$$g(v) \cdot w = v \cdot f(w), \qquad \forall v, w \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Calcolare $g(2,-3,1)$.

(b) Scrivere la matrice di g rispetto alle basi canoniche.

(c) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(d) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(g)$ e una base di $\mathrm{Im}(g)$.

(e) Dimostrare che $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$ e che $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)^\perp$.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti

$$A = (2,0,-1), \quad B = (1,1,2), \quad C = (0,2,1).$$

(a) Trovare l'equazione cartesiana del piano π contenente il triangolo ABC e calcolare l'area di tale triangolo.

(b) Determinare le equazioni cartesiane della retta s, perpendicolare al piano π e passante per il punto $P = (0,1,2)$.

(c) Calcolare la distanza tra la retta s e la retta r, passante per A e B.

(d) Determinare la proiezione ortogonale della retta OP sul piano π (ove O è il punto di coordinate $(0,0,0)$).

(e) Calcolare l'angolo fra il piano π e il piano YZ.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Si determini il valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui -4 è un autovalore di A. Per tale valore di t si dica se A è invertibile, si determinino gli autovalori e gli autovettori della matrice A e si stabilisca se essa è diagonalizzabile.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

3° Appello — 22 settembre 2009

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti

$$A = (-1, 2, -3), \quad B = (2, -1, 3), \quad C = (-1, 0, 0).$$

(a) Trovare l'equazione cartesiana del piano π contenente il triangolo ABC e calcolare l'area di tale triangolo.

(b) Determinare le equazioni cartesiane della retta s, perpendicolare al piano π e passante per il punto $P = (0, -3, 0)$.

(c) Calcolare la distanza tra la retta s e la retta r, passante per A e B.

(d) Determinare la proiezione ortogonale della retta OP sul piano π (ove O è il punto di coordinate $(0, 0, 0)$).

(e) Calcolare l'angolo fra il piano π e il piano XY.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ (dotato del prodotto scalare usuale) sia V il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 0, 2, -1)$, $v_2 = (0, -1, 2, 2)$ e $v_3 = (-1, 1, 0, 1)$. Si scriva la matrice della restrizione del prodotto scalare al sottospazio V rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si determini inoltre una base ortonormale di V.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & t \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Si determini il valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui -4 è un autovalore di A. Per tale valore di t si dica se A è invertibile, si determinino gli autovalori e gli autovettori della matrice A e si stabilisca se essa è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare che soddisfa la seguente uguaglianza:

$$g(v) \cdot w = v \cdot f(w), \qquad \forall v, w \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Calcolare $g(1, -1, 2)$.

(b) Scrivere la matrice di g rispetto alle basi canoniche.

(c) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(d) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(g)$ e una base di $\mathrm{Im}(g)$.

(e) Dimostrare che $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$ e che $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)^\perp$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

3$^{\text{o}}$ Appello — 22 settembre 2009

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Si determini il valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui -4 è un autovalore di A. Per tale valore di t si dica se A è invertibile, si determinino gli autovalori e gli autovettori della matrice A e si stabilisca se essa è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti

$$A = (2, 0, -1), \quad B = (1, 1, 2), \quad C = (0, 2, 1).$$

(a) Trovare l'equazione cartesiana del piano π contenente il triangolo ABC e calcolare l'area di tale triangolo.

(b) Determinare le equazioni cartesiane della retta s, perpendicolare al piano π e passante per il punto $P = (0, 1, 2)$.

(c) Calcolare la distanza tra la retta s e la retta r, passante per A e B.

(d) Determinare la proiezione ortogonale della retta OP sul piano π (ove O è il punto di coordinate $(0, 0, 0)$).

(e) Calcolare l'angolo fra il piano π e il piano YZ.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare che soddisfa la seguente uguaglianza:

$$g(v) \cdot w = v \cdot f(w), \qquad \forall v, w \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Calcolare $g(1, -3, 2)$.

(b) Scrivere la matrice di g rispetto alle basi canoniche.

(c) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(d) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(g)$ e una base di $\mathrm{Im}(g)$.

(e) Dimostrare che $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$ e che $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)^\perp$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ (dotato del prodotto scalare usuale) sia V il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, -1, -2, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2)$ e $v_3 = (1, 2, 0, 1)$. Si scriva la matrice della restrizione del prodotto scalare al sottospazio V rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si determini inoltre una base ortonormale di V.