Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

1º Appello — 14 giugno 2010

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Siano $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_1 + v_3$, $w_3 = v_1 + v_4$, $w_4 = v_2 - v_3$.

(a) Si dica se i vettori w_1, w_2, w_3, w_4 sono una base di V. In caso contrario si determini la dimensione del sottospazio W da essi generato.

(b) Se $W \neq V$ si determini un sottospazio W' di V tale che $V = W \oplus W'$.

(c) Detto U il sottospazio di V generato dai vettori $u_1 = v_1 - v_2 + v_3$ e $u_2 = v_2 + 2v_3 - v_4$, si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 4+t \end{pmatrix}$$

(a) Si determini per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f non è suriettiva. [*In tutte le domande successive si sostituisca a t il valore così trovato*]

(b) Si determini una base dell'immagine e una base del nucleo di f.

(c) Si scrivano le equazioni cartesiane dell'immagine di f.

(d) Si determini un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 3. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -t & 3+t & -t \\ 3-t & t & 3-t \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

si stabilisca se esistono dei valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali A è invertibile. Si determini inoltre per quale valore di t la matrice A è diagonalizzabile. Per tale valore di t si determini una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che si abbia $A = PDP^{-1}$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $x - 2y + 3z + 2w = 0$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si determini una base ortonormale di U.

(c) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (3, 1, 0, -2)$ sul sottospazio U.

Esercizio 5. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, si consideri il piano π di equazione $3x - y + z + 2 = 0$ e i punti $A = (0, 0, -2)$ e $B = (0, 2, 0)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A e ortogonale al piano π.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B.

(c) Dato il punto $P = (3, 2, -1)$ si determini la proiezione ortogonale P' di P sul piano π.

(d) Si determinino tutti i punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia equilatero.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

1$^{\text{o}}$ Appello — 14 giugno 2010

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & -4 & 6+t \end{pmatrix}$$

(a) Si determini per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f non è suriettiva. [*In tutte le domande successive si sostituisca a t il valore così trovato*]

(b) Si determini una base dell'immagine e una base del nucleo di f.

(c) Si scrivano le equazioni cartesiane dell'immagine di f.

(d) Si determini un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 2. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, si consideri il piano π di equazione $2x - 3y + z + 4 = 0$ e i punti $A = (-2, 0, 0)$ e $B = (0, 0, -4)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A e ortogonale al piano π.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B.

(c) Dato il punto $P = (1, 4, -2)$ si determini la proiezione ortogonale P' di P sul piano π.

(d) Si determinino tutti i punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia equilatero.

Esercizio 3. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 6t-2 & -2t & 4t-2 \\ 2+3t & -1-t & 1+2t \end{pmatrix}$$

si stabilisca se esistono dei valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali A è invertibile. Si determini inoltre per quale valore di t la matrice A è diagonalizzabile. Per tale valore di t si determini una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che si abbia $A = PDP^{-1}$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Siano $w_1 = v_1 - v_3$, $w_2 = v_1 + v_2 + v_3$, $w_3 = v_2 + v_4$, $w_4 = v_1 + v_3 - v_4$.

(a) Si dica se i vettori w_1, w_2, w_3, w_4 sono una base di V. In caso contrario si determini la dimensione del sottospazio W da essi generato.

(b) Se $W \neq V$ si determini un sottospazio W' di V tale che $V = W \oplus W'$.

(c) Detto U il sottospazio di V generato dai vettori $u_1 = v_1 + v_3 - 2v_4$ e $u_2 = v_1 + v_2 - v_4$, si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $2x - y + 2z - 3w = 0$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si determini una base ortonormale di U.

(c) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (1, -2, 1, 0)$ sul sottospazio U.

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola __________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

1° Appello — 14 giugno 2010

Esercizio 1. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, si consideri il piano π di equazione $x + 2y - 3z - 3 = 0$ e i punti $A = (3, 0, 0)$ e $B = (0, 0, -1)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A e ortogonale al piano π.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B.

(c) Dato il punto $P = (2, -1, 1)$ si determini la proiezione ortogonale P' di P sul piano π.

(d) Si determinino tutti i punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia equilatero.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Siano $w_1 = v_2 - v_3 + v_4$, $w_2 = v_1 + v_4$, $w_3 = v_1 + v_2 + v_4$, $w_4 = v_1 + v_3$.

(a) Si dica se i vettori w_1, w_2, w_3, w_4 sono una base di V. In caso contrario si determini la dimensione del sottospazio W da essi generato.

(b) Se $W \neq V$ si determini un sottospazio W' di V tale che $V = W \oplus W'$.

(c) Detto U il sottospazio di V generato dai vettori $u_1 = v_1 + 2v_2 - v_4$ e $u_2 = v_1 + v_3 + 2v_4$, si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $2x - 3y + z + 3w = 0$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si determini una base ortonormale di U.

(c) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (10, 1, 0, 2)$ sul sottospazio U.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & -2 \\ 2 & 8 & -5 & 2+t \end{pmatrix}$$

(a) Si determini per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f non è suriettiva. [*In tutte le domande successive si sostituisca a t il valore così trovato*]

(b) Si determini una base dell'immagine e una base del nucleo di f.

(c) Si scrivano le equazioni cartesiane dell'immagine di f.

(d) Si determini un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 5. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2t & 1+2t & -t \\ 2-2t & 2t-1 & 1-t \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

si stabilisca se esistono dei valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali A è invertibile. Si determini inoltre per quale valore di t la matrice A è diagonalizzabile. Per tale valore di t si determini una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che si abbia $A = PDP^{-1}$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

1º Appello — 14 giugno 2010

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -5 & 6 & 5+t \end{pmatrix}$$

(a) Si determini per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f non è suriettiva. [*In tutte le domande successive si sostituisca a t il valore così trovato*]

(b) Si determini una base dell'immagine e una base del nucleo di f.

(c) Si scrivano le equazioni cartesiane dell'immagine di f.

(d) Si determini un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $3x - 2y + 2z - w = 0$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si determini una base ortonormale di U.

(c) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (2, 0, -1, 1)$ sul sottospazio U.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Siano $w_1 = v_1 + 2v_2 + v_3$, $w_2 = v_2 - v_4$, $w_3 = v_1 + v_3 + v_4$, $w_4 = 2v_2 - v_4$.

(a) Si dica se i vettori w_1, w_2, w_3, w_4 sono una base di V. In caso contrario si determini la dimensione del sottospazio W da essi generato.

(b) Se $W \neq V$ si determini un sottospazio W' di V tale che $V = W \oplus W'$.

(c) Detto U il sottospazio di V generato dai vettori $u_1 = 2v_1 + v_3 + v_4$ e $u_2 = v_2 - v_3 + 2v_4$, si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, si consideri il piano π di equazione $2x - y + 4z - 4 = 0$ e i punti $A = (0, -4, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A e ortogonale al piano π.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B.

(c) Dato il punto $P = (1, 3, 2)$ si determini la proiezione ortogonale P' di P sul piano π.

(d) Si determinino tutti i punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia equilatero.

Esercizio 5. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4-t & 4-2t & 2-t \\ 2 & 4 & 2 \\ t-6 & 2t-8 & t-4 \end{pmatrix}$$

si stabilisca se esistono dei valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali A è invertibile. Si determini inoltre per quale valore di t la matrice A è diagonalizzabile. Per tale valore di t si determini una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che si abbia $A = PDP^{-1}$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

1º Appello — 14 giugno 2010

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Siano $w_1 = v_2 + v_3 - v_4$, $w_2 = v_1 - v_3 - v_4$, $w_3 = v_1 + v_2 + 2v_3$, $w_4 = v_1 + v_3 + v_4$.

(a) Si dica se i vettori w_1, w_2, w_3, w_4 sono una base di V. In caso contrario si determini la dimensione del sottospazio W da essi generato.

(b) Se $W \neq V$ si determini un sottospazio W' di V tale che $V = W \oplus W'$.

(c) Detto U il sottospazio di V generato dai vettori $u_1 = v_1 + v_2 + 3v_3$ e $u_2 = 2v_1 - v_3 + v_4$, si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 2. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, si consideri il piano π di equazione $3x - 3y + z - 6 = 0$ e i punti $A = (2, 0, 0)$ e $B = (0, -2, 0)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A e ortogonale al piano π.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B.

(c) Dato il punto $P = (1, -1, -3)$ si determini la proiezione ortogonale P' di P sul piano π.

(d) Si determinino tutti i punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia equilatero.

Esercizio 3. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -4 \\ 8t & 2t-2 & 4t \\ 12-4t & 4-t & 6-2t \end{pmatrix}$$

si stabilisca se esistono dei valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali A è invertibile. Si determini inoltre per quale valore di t la matrice A è diagonalizzabile. Per tale valore di t si determini una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che si abbia $A = PDP^{-1}$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $2x - 3y + z + 2w = 0$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si determini una base ortonormale di U.

(c) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (2, 0, 1, -1)$ sul sottospazio U.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 8 & -6 & t \end{pmatrix}$$

(a) Si determini per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f non è suriettiva. [*In tutte le domande successive si sostituisca a t il valore così trovato*]

(b) Si determini una base dell'immagine e una base del nucleo di f.

(c) Si scrivano le equazioni cartesiane dell'immagine di f.

(d) Si determini un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus \operatorname{Ker} f$.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

1° Appello — 14 giugno 2010

Esercizio 1. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3-t & t & -3-t \\ -9-t & 6+t & -9-t \end{pmatrix}$$
si stabilisca se esistono dei valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali A è invertibile. Si determini inoltre per quale valore di t la matrice A è diagonalizzabile. Per tale valore di t si determini una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che si abbia $A = PDP^{-1}$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Siano $w_1 = v_1 - v_2 + 2v_4$, $w_2 = 2v_2 + v_3 - v_4$, $w_3 = v_1 + 2v_3$, $w_4 = v_2 + 2v_3 - 2v_4$.

(a) Si dica se i vettori w_1, w_2, w_3, w_4 sono una base di V. In caso contrario si determini la dimensione del sottospazio W da essi generato.

(b) Se $W \neq V$ si determini un sottospazio W' di V tale che $V = W \oplus W'$.

(c) Detto U il sottospazio di V generato dai vettori $u_1 = v_1 - 2v_2 + v_3$ e $u_2 = 2v_1 - 2v_3 + v_4$, si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 3 & t-1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f non è suriettiva. [*In tutte le domande successive si sostituisca a t il valore così trovato*]

(b) Si determini una base dell'immagine e una base del nucleo di f.

(c) Si scrivano le equazioni cartesiane dell'immagine di f.

(d) Si determini un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, si consideri il piano π di equazione $x + 2y - z + 3 = 0$ e i punti $A = (-3, 0, 0)$ e $B = (0, 0, 3)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A e ortogonale al piano π.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B.

(c) Dato il punto $P = (4, 1, 2)$ si determini la proiezione ortogonale P' di P sul piano π.

(d) Si determinino tutti i punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia equilatero.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $x + 3y - 2z + 2w = 0$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si determini una base ortonormale di U.

(c) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (1, -3, 2, 0)$ sul sottospazio U.