Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

4° Appello — 8 febbraio 2011

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 0, -1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 0, 2)$ e $u_3 = (0, 1, -2, -1)$.

(a) Si determini la dimensione di U.

(b) Si determini una base di un sottospazio W tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e si dica se un tale sottospazio W è unico.

(c) Dato il vettore $u_t = (t, -1, 0, -1)$, si stabilisca per quale valore di t si ha $u_t \in U$.

(d) Dato il vettore $v = (6, -1, 0, 3)$, lo si scriva come somma $v = u' + w'$, con $u' \in U$ e $w' \in W$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino delle basi del nucleo e dell'immagine di f.

(b) Dato il vettore $u_t = (7, 2, t, 1)$ si determini t in modo che $u_t \in \operatorname{Ker}(f)$.

(c) Dato il vettore $w_t = (2, t, 0)$, si dica per quale valore di t si ha $f^{-1}(w_t) \neq \varnothing$.

(d) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (3, -1, 2, 2)$ e $u_2 = (1, 1, 1, 3)$. Si determini una base del sottospazio $f(U)$.

(e) Si stabilisca se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che la funzione composta $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità. Se una tale g esiste se ne determini la matrice.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

(a) Si determini una base di U.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane e una base del sottospazio $U^\perp$, ortogonale di U.

(c) Dato il vettore $v = (3, -2, 5, 7)$ si determinino due vettori $u \in U$ e $w \in U^\perp$ tali che $v = u + w$.

(d) Dati i vettori $v_1 = (2, -1, 3, 1)$ e $v_2 = (0, 2, 1, -1)$ li si completi ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti $A = (2, 3, 1)$, $B = (1, -2, -1)$ e il vettore $n = (2, 1, 1)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per il punto medio M del segmento AB e ortogonale al vettore n.

(b) Si determini l'angolo α formato dalla retta r, passante per i punti A e B, e il piano π.

(c) Dato il punto $C = (2, -3, 4)$ se ne determinino le proiezioni ortogonali C', sulla retta r, e C'', sul piano π.

(d) Si determinino le equazioni della retta s passante per il punto M, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e sia f l'endomorfismo di V definito da $f(v_1) = 3v_1 + 2v_3$, $f(v_2) = 2v_2 + 3v_4$, $f(v_3) = 2v_1 + 3v_3$, $f(v_4) = 2v_2 + 3v_4$. Si dica se f è invertibile e si determini una base di V rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

4º Appello — 8 febbraio 2011

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazioni

$$U : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

(a) Si determini una base di U.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane e una base del sottospazio $U^\perp$, ortogonale di U.

(c) Dato il vettore $v = (6, 1, -4, -5)$ si determinino due vettori $u \in U$ e $w \in U^\perp$ tali che $v = u + w$.

(d) Dati i vettori $v_1 = (3, 0, -1, 2)$ e $v_2 = (1, 2, 1, -1)$ li si completi ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e sia f l'endomorfismo di V definito da $f(v_1) = v_1 + 4v_3$, $f(v_2) = 4v_2 + v_4$, $f(v_3) = v_1 + 4v_3$, $f(v_4) = v_2 + 4v_4$. Si dica se f è invertibile e si determini una base di V rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino delle basi del nucleo e dell'immagine di f.

(b) Dato il vettore $u_t = (2, t, 1, 3)$ si determini t in modo che $u_t \in \mathrm{Ker}(f)$.

(c) Dato il vettore $w_t = (-1, 2, t)$, si dica per quale valore di t si ha $f^{-1}(w_t) \neq \varnothing$.

(d) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (1, -2, 3, 4)$ e $u_2 = (4, -6, 1, 8)$. Si determini una base del sottospazio $f(U)$.

(e) Si stabilisca se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che la funzione composta $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità. Se una tale g esiste se ne determini la matrice.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 3, 0, -1)$, $u_2 = (0, 2, 1, 2)$ e $u_3 = (2, -1, 1, 0)$.

(a) Si determini la dimensione di U.

(b) Si determini una base di un sottospazio W tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e si dica se un tale sottospazio W è unico.

(c) Dato il vettore $u_t = (1, 0, 3, t)$, si stabilisca per quale valore di t si ha $u_t \in U$.

(d) Dato il vettore $v = (5, 7, -1, -5)$, lo si scriva come somma $v = u' + w'$, con $u' \in U$ e $w' \in W$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti $A = (1, 4, -2)$, $B = (2, -1, 1)$ e il vettore $n = (2, -2, 1)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per il punto medio M del segmento AB e ortogonale al vettore n.

(b) Si determini l'angolo α formato dalla retta r, passante per i punti A e B, e il piano π.

(c) Dato il punto $C = (2, -3, 1)$ se ne determinino le proiezioni ortogonali C', sulla retta r, e C'', sul piano π.

(d) Si determinino le equazioni della retta s passante per il punto M, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.