Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

23 giugno 2011

☐ 2^a prova di accertamento: **solo esercizi 3, 4 e 5**
☐ 1^o appello: **tutti gli esercizi**

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (12, 3, -2, 0)$ e sia W il sottospazio di equazione $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$.

(a) Si dimostri che $U \subset W$ e si completi la base di U ad una base di W.

(b) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 2, 3, 0)$ e $v_2 = (2, 3, 4, -1)$. Si determini una base di $V \cap W$ e una base di $V + W$.

(c) Dato il vettore $v_t = (t, 0, 1, 2)$, si determini il valore di t per cui i vettori v_1, v_2, v_t sono linearmente dipendenti.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $W = \operatorname{Ker} f$ e $U = \operatorname{Im} f$.

Esercizio 2. Siano dati i vettori $v_1 = (4, -2, 6)$, $v_2 = (0, 4, 4)$, $v_3 = (-1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ e si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(1, 0, 1, 0) = v_1$, $f(1, 0, -1, 0) = v_2$ e tale che i vettori $(0, 1, 0, 0)$ e $(2, 0, -1, -3)$ appartengano a $f^{-1}(v_3)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche e si determinino delle basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + 3x_3 + x_4 = 0$. Si determini una base di W e una base di $f(W)$. Si determini inoltre una base di $\operatorname{Ker}(f) \cap W$.

(c) Si scriva la matrice della funzione indotta da f, $f|_W : W \to \mathbb{R}^3$, rispetto alla base di W trovata nel punto (b) e alla base canonica del codominio.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4, con base v_1, v_2, v_3, v_4. Sia $f : V \to V$ la funzione lineare definita da $f(v_1) = v_1 + 3v_3$, $f(v_2) = v_2 + v_4$, $f(v_3) = 2v_1 + 2v_3$, $f(v_4) = -2v_2 - 2v_4$.

(a) Si stabilisca se f è suriettiva e si determini una base di $\operatorname{Im} f$.

(b) Si determini, se possibile, una base w_1, w_2, w_3, w_4 di V rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

(c) Si dica se esistono due vettori linearmente indipendenti $u_1, u_2 \in V$ tali che $f(u_1) = f(u_2)$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (2, 2, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, -4, -1)$.

(a) Dato il vettore $v = (3, -2, 1, 2)$ si determini la sua proiezione ortogonale su U.

(b) Si determini, se possibile, un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$, $L \neq U^\perp$, tale che $U \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Si determini una base ortonormale di U.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale $f(v)$ sul sottospazio U. Si determini una base del nucleo di f.

Esercizio 5. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i punti $A = (2, 1, -1)$, $B = (4, -2, 0)$ e la retta r di equazioni $x - 2y - 5 = 0$ e $2y - z = 0$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π che passa per i punti A e B e che interseca la retta r in un punto C equidistante da A e B.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per il punto C, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(c) Si determini la proiezione ortogonale del punto A sulla retta r.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

23 giugno 2011

☐ 2^a prova di accertamento: **solo esercizi 3, 4 e 5**
☐ 1^o appello: **tutti gli esercizi**

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (4, 2, 5, 0)$ e sia W il sottospazio di equazione $x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0$.

(a) Si dimostri che $U \subset W$ e si completi la base di U ad una base di W.

(b) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (2, -1, 2, 0)$ e $v_2 = (2, 3, -2, 1)$. Si determini una base di $V \cap W$ e una base di $V + W$.

(c) Dato il vettore $v_t = (t, 3, 2, 2)$, si determini il valore di t per cui i vettori v_1, v_2, v_t sono linearmente dipendenti.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $W = \operatorname{Ker} f$ e $U = \operatorname{Im} f$.

Esercizio 2. Siano dati i vettori $v_1 = (-4, 4, 4)$, $v_2 = (0, -2, -4)$, $v_3 = (1, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$ e si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(0, 1, 0, 1) = v_1$, $f(0, 1, 0, -1) = v_2$ e tale che i vettori $(0, 0, 1, 0)$ e $(-2, -1, 3, 1)$ appartengano a $f^{-1}(v_3)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche e si determinino delle basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + x_3 + x_4 = 0$. Si determini una base di W e una base di $f(W)$. Si determini inoltre una base di $\operatorname{Ker}(f) \cap W$.

(c) Si scriva la matrice della funzione indotta da f, $f|_W : W \to \mathbb{R}^3$, rispetto alla base di W trovata nel punto (b) e alla base canonica del codominio.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4, con base v_1, v_2, v_3, v_4. Sia $f : V \to V$ la funzione lineare definita da $f(v_1) = 2v_1 + 4v_3$, $f(v_2) = 2v_2 - 2v_4$, $f(v_3) = v_1 - v_3$, $f(v_4) = -v_2 + v_4$.

(a) Si stabilisca se f è suriettiva e si determini una base di $\operatorname{Im} f$.

(b) Si determini, se possibile, una base w_1, w_2, w_3, w_4 di V rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

(c) Si dica se esistono due vettori linearmente indipendenti $u_1, u_2 \in V$ tali che $f(u_1) = f(u_2)$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (1, -2, 0, 2)$, $u_2 = (0, 0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 4, 0)$.

(a) Dato il vettore $v = (2, -3, 1, -2)$ si determini la sua proiezione ortogonale su U.

(b) Si determini, se possibile, un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$, $L \neq U^\perp$, tale che $U \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Si determini una base ortonormale di U.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale $f(v)$ sul sottospazio U. Si determini una base del nucleo di f.

Esercizio 5. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i punti $A = (1, -3, 0)$, $B = (2, -1, 1)$ e la retta r di equazioni $2x + y - 4 = 0$ e $2x - z - 7 = 0$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π che passa per i punti A e B e che interseca la retta r in un punto C equidistante da A e B.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per il punto C, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(c) Si determini la proiezione ortogonale del punto A sulla retta r.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

23 giugno 2011

☐ 2^{a} prova di accertamento: **solo esercizi 3, 4 e 5**
☐ 1^{o} appello: **tutti gli esercizi**

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (1, 4, 5, 0)$ e sia W il sottospazio di equazione $x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$.

(a) Si dimostri che $U \subset W$ e si completi la base di U ad una base di W.

(b) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (2, 4, -1, 1)$ e $v_2 = (-2, -1, 1, 0)$. Si determini una base di $V \cap W$ e una base di $V + W$.

(c) Dato il vettore $v_t = (t, 5, 1, 2)$, si determini il valore di t per cui i vettori v_1, v_2, v_t sono linearmente dipendenti.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $W = \operatorname{Ker} f$ e $U = \operatorname{Im} f$.

Esercizio 2. Siano dati i vettori $v_1 = (6, 3, 0)$, $v_2 = (0, -1, 2)$, $v_3 = (-1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$ e si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(1, 0, 0, 1) = v_1$, $f(1, 0, 0, -1) = v_2$ e tale che i vettori $(0, 1, 0, 0)$ e $(2, 1, 1, -2)$ appartengano a $f^{-1}(v_3)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche e si determinino delle basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + x_2 + 3x_4 = 0$. Si determini una base di W e una base di $f(W)$. Si determini inoltre una base di $\operatorname{Ker}(f) \cap W$.

(c) Si scriva la matrice della funzione indotta da f, $f|_W : W \to \mathbb{R}^3$, rispetto alla base di W trovata nel punto (b) e alla base canonica del codominio.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4, con base v_1, v_2, v_3, v_4. Sia $f : V \to V$ la funzione lineare definita da $f(v_1) = 2v_1 - 3v_3$, $f(v_2) = -2v_2 - 2v_4$, $f(v_3) = v_1 - 2v_3$, $f(v_4) = 3v_2 + 3v_4$.

(a) Si stabilisca se f è suriettiva e si determini una base di $\operatorname{Im} f$.

(b) Si determini, se possibile, una base w_1, w_2, w_3, w_4 di V rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

(c) Si dica se esistono due vettori linearmente indipendenti $u_1, u_2 \in V$ tali che $f(u_1) = f(u_2)$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (2, -2, 0, 1)$, $u_2 = (1, 0, -1, 0)$, $u_3 = (0, 1, -4, 1)$.

(a) Dato il vettore $v = (3, 1, 2, -1)$ si determini la sua proiezione ortogonale su U.

(b) Si determini, se possibile, un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$, $L \neq U^{\perp}$, tale che $U \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Si determini una base ortonormale di U.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale $f(v)$ sul sottospazio U. Si determini una base del nucleo di f.

Esercizio 5. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i punti $A = (2, 0, 3)$, $B = (1, -2, 4)$ e la retta r di equazioni $2x - y - 7 = 0$ e $2x + z - 11 = 0$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π che passa per i punti A e B e che interseca la retta r in un punto C equidistante da A e B.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per il punto C, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(c) Si determini la proiezione ortogonale del punto A sulla retta r.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

23 giugno 2011

☐ 2^a prova di accertamento: **solo esercizi 3, 4 e 5**
☐ 1^o appello: **tutti gli esercizi**

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (1, 2, 3, 0)$ e sia W il sottospazio di equazione $x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$.

(a) Si dimostri che $U \subset W$ e si completi la base di U ad una base di W.

(b) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, -1, 1, 2)$ e $v_2 = (0, 4, -1, -5)$. Si determini una base di $V \cap W$ e una base di $V + W$.

(c) Dato il vettore $v_t = (t, 8, 1, -7)$, si determini il valore di t per cui i vettori v_1, v_2, v_t sono linearmente dipendenti.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $W = \operatorname{Ker} f$ e $U = \operatorname{Im} f$.

Esercizio 2. Siano dati i vettori $v_1 = (-1, -1, -1)$, $v_2 = (-5, -3, -7)$, $v_3 = (0, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$ e si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(0, 1, 1, 0) = v_1$, $f(0, 1, -1, 0) = v_2$ e tale che i vettori $(0, 0, 0, 1)$ e $(1, 1, 1, 3)$ appartengano a $f^{-1}(v_3)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche e si determinino delle basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Si determini una base di W e una base di $f(W)$. Si determini inoltre una base di $\operatorname{Ker}(f) \cap W$.

(c) Si scriva la matrice della funzione indotta da f, $f|_W : W \to \mathbb{R}^3$, rispetto alla base di W trovata nel punto (b) e alla base canonica del codominio.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4, con base v_1, v_2, v_3, v_4. Sia $f : V \to V$ la funzione lineare definita da $f(v_1) = 2v_1 - 5v_3$, $f(v_2) = v_2 - v_4$, $f(v_3) = -v_1 - 2v_3$, $f(v_4) = 4v_2 - 4v_4$.

(a) Si stabilisca se f è suriettiva e si determini una base di $\operatorname{Im} f$.

(b) Si determini, se possibile, una base w_1, w_2, w_3, w_4 di V rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

(c) Si dica se esistono due vettori linearmente indipendenti $u_1, u_2 \in V$ tali che $f(u_1) = f(u_2)$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (-2, 2, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0, 1)$, $u_3 = (0, 1, -1, 4)$.

(a) Dato il vettore $v = (1, -3, 1, -2)$ si determini la sua proiezione ortogonale su U.

(b) Si determini, se possibile, un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$, $L \neq U^\perp$, tale che $U \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Si determini una base ortonormale di U.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale $f(v)$ sul sottospazio U. Si determini una base del nucleo di f.

Esercizio 5. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i punti $A = (-1, 3, 1)$, $B = (0, 2, 3)$ e la retta r di equazioni $x - 2z + 3 = 0$ e $y + 2z - 8 = 0$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π che passa per i punti A e B e che interseca la retta r in un punto C equidistante da A e B.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per il punto C, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(c) Si determini la proiezione ortogonale del punto A sulla retta r.