Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

3$^{\text{o}}$ Appello — 19 settembre 2011

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione data da $f(x, y, z) = (2x + y - 3z, -x + 2z, x - 2y - 4z)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche del dominio e codominio.

(b) Si determinino delle basi di $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ e si dica se $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ sono in somma diretta.

(c) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica del dominio e alla base $w_1 = (0, -1, 1)$, $w_2 = (1, 0, 1)$, $w_3 = (1, -1, 0)$ del codominio.

(d) Si determini una matrice S tale che $B = SA$.

(e) Le matrici A e B sono simili? Perché? [*sugg.:* si calcoli il polinomio caratteristico di A e B]

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 0 & t & 1 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini il valore di t in modo che il vettore $v = (1, 1, -1)$ sia un autovettore di A.

(b) Per il valore di t trovato al punto (a) si determinino gli autovalori e gli autovettori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

(c) È possibile trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Perché?

(d) Esiste una matrice *non diagonale* simile alla matrice A?

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ sono dati i sottospazi V_1, generato dal vettore $v_1 = (1, 2, -1)$ e V_2, generato dal vettore $v_2 = (1, 1, -1)$.

(a) Si determini una base di $(V_1 + V_2)^\perp$ e una base di $V_1^\perp \cap V_2^\perp$.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $w = (1, -1, 4)$ sul sottospazio $V_1 + V_2$.

(c) Dette p_{V_1} e p_{V_2} le proiezioni ortogonali su V_1 e V_2 rispettivamente, si determinino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $p_{V_1}(v) = p_{V_2}(v)$.

(d) Si determini l'insieme S di tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su V_1 è il vettore $(2, 4, -2)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (3, -1, 1)$, $B = (2, 1, 3)$ e la retta r di equazioni $x - 3y = 2$ e $x + y - 2z = 6$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per A e B.

(b) Si stabilisca se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(c) Si determini la distanza della retta r dalla retta s.

(d) Si determini l'equazione cartesiana del piano π che passa per i punti A e B e che interseca la retta r in un punto C tale che il triangolo ABC sia rettangolo, con l'angolo retto in A.

(e) Dato il punto $P = (1, -3, 5)$ se ne determini la proiezione ortogonale sul piano π.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

3$^{\text{o}}$ Appello — 19 settembre 2011

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione data da $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, -2x + 2z, x - y - 3z)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche del dominio e codominio.

(b) Si determinino delle basi di $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ e si dica se $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ sono in somma diretta.

(c) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica del dominio e alla base $w_1 = (0, 1, -1)$, $w_2 = (-1, 0, 1)$, $w_3 = (1, 1, 0)$ del codominio.

(d) Si determini una matrice S tale che $B = SA$.

(e) Le matrici A e B sono simili? Perché? [*sugg.:* si calcoli il polinomio caratteristico di A e B]

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & t & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini il valore di t in modo che il vettore $v = (1, -1, 0)$ sia un autovettore di A.

(b) Per il valore di t trovato al punto (a) si determinino gli autovalori e gli autovettori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

(c) È possibile trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Perché?

(d) Esiste una matrice *non diagonale* simile alla matrice A?

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ sono dati i sottospazi V_1, generato dal vettore $v_1 = (2, -1, 1)$ e V_2, generato dal vettore $v_2 = (1, -1, 1)$.

(a) Si determini una base di $(V_1 + V_2)^\perp$ e una base di $V_1^\perp \cap V_2^\perp$.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $w = (2, -2, 5)$ sul sottospazio $V_1 + V_2$.

(c) Dette p_{V_1} e p_{V_2} le proiezioni ortogonali su V_1 e V_2 rispettivamente, si determinino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $p_{V_1}(v) = p_{V_2}(v)$.

(d) Si determini l'insieme S di tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su V_1 è il vettore $(4, -2, 2)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (1, 2, -3)$, $B = (2, 0, -1)$ e la retta r di equazioni $x - 2y = -1$ e $x + y + 2z = 0$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per A e B.

(b) Si stabilisca se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(c) Si determini la distanza della retta r dalla retta s.

(d) Si determini l'equazione cartesiana del piano π che passa per i punti A e B e che interseca la retta r in un punto C tale che il triangolo ABC sia rettangolo, con l'angolo retto in A.

(e) Dato il punto $P = (2, -1, 3)$ se ne determini la proiezione ortogonale sul piano π.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

3^o Appello — 19 settembre 2011

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione data da $f(x, y, z) = (3x - 4y + 5z, x + 3z, -x + 2y - z)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche del dominio e codominio.

(b) Si determinino delle basi di $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ e si dica se $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ sono in somma diretta.

(c) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica del dominio e alla base $w_1 = (0, 1, 1)$, $w_2 = (1, 0, -1)$, $w_3 = (-1, 1, 0)$ del codominio.

(d) Si determini una matrice S tale che $B = SA$.

(e) Le matrici A e B sono simili? Perché? [*sugg.:* si calcoli il polinomio caratteristico di A e B]

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$$

(a) Si determini il valore di t in modo che il vettore $v = (0, 1, 1)$ sia un autovettore di A.

(b) Per il valore di t trovato al punto (a) si determinino gli autovalori e gli autovettori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

(c) È possibile trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Perché?

(d) Esiste una matrice *non diagonale* simile alla matrice A?

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ sono dati i sottospazi V_1, generato dal vettore $v_1 = (1, 1, -2)$ e V_2, generato dal vettore $v_2 = (1, 1, 1)$.

(a) Si determini una base di $(V_1 + V_2)^\perp$ e una base di $V_1^\perp \cap V_2^\perp$.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $w = (4, -1, 2)$ sul sottospazio $V_1 + V_2$.

(c) Dette p_{V_1} e p_{V_2} le proiezioni ortogonali su V_1 e V_2 rispettivamente, si determinino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $p_{V_1}(v) = p_{V_2}(v)$.

(d) Si determini l'insieme S di tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su V_1 è il vettore $(2, 2, -4)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (2, -3, 1)$, $B = (3, -1, 4)$ e la retta r di equazioni $x + 2y = -1$ e $x - y + 2z = 5$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per A e B.

(b) Si stabilisca se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(c) Si determini la distanza della retta r dalla retta s.

(d) Si determini l'equazione cartesiana del piano π che passa per i punti A e B e che interseca la retta r in un punto C tale che il triangolo ABC sia rettangolo, con l'angolo retto in A.

(e) Dato il punto $P = (2, 3, -3)$ se ne determini la proiezione ortogonale sul piano π.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

3° Appello — 19 settembre 2011

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione data da $f(x, y, z) = (x - y - 2z, 3x + 3z, -x + 2y + 5z)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche del dominio e codominio.

(b) Si determinino delle basi di $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ e si dica se $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ sono in somma diretta.

(c) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica del dominio e alla base $w_1 = (0, 1, -1)$, $w_2 = (1, 0, 1)$, $w_3 = (-1, 1, 0)$ del codominio.

(d) Si determini una matrice S tale che $B = SA$.

(e) Le matrici A e B sono simili? Perché? [*sugg.:* si calcoli il polinomio caratteristico di A e B]

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & -2 \\ -1 & -8 & 2 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini il valore di t in modo che il vettore $v = (1, -1, -1)$ sia un autovettore di A.

(b) Per il valore di t trovato al punto (a) si determinino gli autovalori e gli autovettori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

(c) È possibile trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Perché?

(d) Esiste una matrice *non diagonale* simile alla matrice A?

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ sono dati i sottospazi V_1, generato dal vettore $v_1 = (2, -1, -1)$ e V_2, generato dal vettore $v_2 = (2, -1, 2)$.

(a) Si determini una base di $(V_1 + V_2)^\perp$ e una base di $V_1^\perp \cap V_2^\perp$.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $w = (4, 7, -2)$ sul sottospazio $V_1 + V_2$.

(c) Dette p_{V_1} e p_{V_2} le proiezioni ortogonali su V_1 e V_2 rispettivamente, si determinino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $p_{V_1}(v) = p_{V_2}(v)$.

(d) Si determini l'insieme S di tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su V_1 è il vettore $(4, -2, -2)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (0, 3, -1)$, $B = (3, 1, 2)$ e la retta r di equazioni $2x - y = -4$ e $3x - y + z = -3$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per A e B.

(b) Si stabilisca se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(c) Si determini la distanza della retta r dalla retta s.

(d) Si determini l'equazione cartesiana del piano π che passa per i punti A e B e che interseca la retta r in un punto C tale che il triangolo ABC sia rettangolo, con l'angolo retto in A.

(e) Dato il punto $P = (1, 2, -5)$ se ne determini la proiezione ortogonale sul piano π.