A

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò

2° Appello — 18 luglio 2012

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $f(0,1,0,0) = (0,1,0,2)$, $f(0,0,0,1) = (2,-1,-1,-3)$, $f(0,0,1,-1) = (8,0,-4,-4)$, $f(1,0,-1,1) = (-6,0,3,3)$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) Si dica se $\operatorname{Ker}(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$ sono in somma diretta. In caso contrario, si determini una base di $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.

(d) Si determini, se ciò è possibile, un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f) \oplus L = \mathbb{R}^4$ e si dica se tale sottospazio L è unico.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2,-1,0,1)$, $u_2 = (0,1,2,-1)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base del sottospazio $U^\perp$.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (3,4,3,0)$ sul sottospazio U.

(c) Sia W il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che contiene U e il vettore $w = (1,0,-2,1)$. Si determini l'equazione cartesiana di W.

(d) Si determini una base ortonormale di W.

Esercizio 3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva il polinomio caratteristico e si determinino gli autovalori di A.

(b) Si determinino delle basi degli autospazi di A.

(c) Si stabilisca se A è simile a una matrice diagonale D. In caso di risposta affermativa si determini una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare non nulla $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f \circ g = 0$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sia π il piano di equazione $2x - y + z = 1$ e siano $A = (-1,0,3)$ e $B = (2,2,-1)$ due punti di π. Si indichi con $\mathscr{C}$ la circonferenza, contenuta nel piano π, di centro A e passante per B.

(a) Si determinino le equazioni parametriche della retta s, contenuta nel piano π, passante per B e tangente alla circonferenza $\mathscr{C}$.

(b) Si determini il punto $B' \in \mathscr{C}$ diametralmente opposto al punto B.

(c) Si determinino i due punti P_1 e P_2 la cui distanza dal piano π è $d = 2\sqrt{6}$ e la cui proiezione ortogonale su π è il punto A assegnato.

(d) Si determinino le distanze dei punti P_1 e P_2 dalla retta s trovata nel punto (a).

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò

2° Appello — 18 luglio 2012

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $f(0,1,0,0) = (1,0,-1,2)$, $f(0,0,0,1) = (1,1,-3,2)$, $f(0,0,-1,1) = (2,2,-6,4)$, $f(1,0,-1,1) = (2,1,-4,4)$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) Si dica se $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ sono in somma diretta. In caso contrario, si determini una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

(d) Si determini, se ciò è possibile, un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $(\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f) \oplus L = \mathbb{R}^4$ e si dica se tale sottospazio L è unico.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1,0,-2,1)$, $u_2 = (2,1,0,1)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base del sottospazio $U^\perp$.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (6,-1,-1,4)$ sul sottospazio U.

(c) Sia W il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che contiene U e il vettore $w = (0,1,-2,-1)$. Si determini l'equazione cartesiana di W.

(d) Si determini una base ortonormale di W.

Esercizio 3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva il polinomio caratteristico e si determinino gli autovalori di A.

(b) Si determinino delle basi degli autospazi di A.

(c) Si stabilisca se A è simile a una matrice diagonale D. In caso di risposta affermativa si determini una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare non nulla $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f \circ g = 0$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sia π il piano di equazione $x + 2y - 3z = -3$ e siano $A = (3,0,2)$ e $B = (-2,1,1)$ due punti di π. Si indichi con $\mathscr{C}$ la circonferenza, contenuta nel piano π, di centro A e passante per B.

(a) Si determinino le equazioni parametriche della retta s, contenuta nel piano π, passante per B e tangente alla circonferenza $\mathscr{C}$.

(b) Si determini il punto $B' \in \mathscr{C}$ diametralmente opposto al punto B.

(c) Si determinino i due punti P_1 e P_2 la cui distanza dal piano π è $d = 2\sqrt{14}$ e la cui proiezione ortogonale su π è il punto A assegnato.

(d) Si determinino le distanze dei punti P_1 e P_2 dalla retta s trovata nel punto (a).

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò

2º Appello — 18 luglio 2012

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $f(0,1,0,0) = (2,0,-1,0)$, $f(0,0,1,0) = (3,-1,-1,2)$, $f(0,0,1,-1) = (2,-2,0,4)$, $f(1,0,1,-1) = (3,-3,0,6)$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) Si dica se $\operatorname{Ker}(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$ sono in somma diretta. In caso contrario, si determini una base di $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.

(d) Si determini, se ciò è possibile, un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f) \oplus L = \mathbb{R}^4$ e si dica se tale sottospazio L è unico.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1,-2,1,0)$, $u_2 = (0,2,-1,1)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base del sottospazio $U^\perp$.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (3,-1,2,0)$ sul sottospazio U.

(c) Sia W il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che contiene U e il vettore $w = (1,0,1,1)$. Si determini l'equazione cartesiana di W.

(d) Si determini una base ortonormale di W.

Esercizio 3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva il polinomio caratteristico e si determinino gli autovalori di A.

(b) Si determinino delle basi degli autospazi di A.

(c) Si stabilisca se A è simile a una matrice diagonale D. In caso di risposta affermativa si determini una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare non nulla $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f \circ g = 0$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sia π il piano di equazione $3x - y - z = 3$ e siano $A = (2,1,2)$ e $B = (0,-4,1)$ due punti di π. Si indichi con $\mathscr{C}$ la circonferenza, contenuta nel piano π, di centro A e passante per B.

(a) Si determinino le equazioni parametriche della retta s, contenuta nel piano π, passante per B e tangente alla circonferenza $\mathscr{C}$.

(b) Si determini il punto $B' \in \mathscr{C}$ diametralmente opposto al punto B.

(c) Si determinino i due punti P_1 e P_2 la cui distanza dal piano π è $d = 2\sqrt{11}$ e la cui proiezione ortogonale su π è il punto A assegnato.

(d) Si determinino le distanze dei punti P_1 e P_2 dalla retta s trovata nel punto (a).

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò

2º Appello — 18 luglio 2012

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $f(0,1,0,0) = (-2,2,0,1)$, $f(0,0,0,1) = (-3,4,-2,2)$, $f(0,0,1,1) = (2,0,-4,0)$, $f(1,0,1,1) = (3,0,-6,0)$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) Si dica se $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ sono in somma diretta. In caso contrario, si determini una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

(d) Si determini, se ciò è possibile, un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $(\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f) \oplus L = \mathbb{R}^4$ e si dica se tale sottospazio L è unico.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (0,1,-1,-1)$, $u_2 = (1,2,0,1)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base del sottospazio $U^\perp$.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (4,3,-2,-2)$ sul sottospazio U.

(c) Sia W il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che contiene U e il vettore $w = (1,0,1,2)$. Si determini l'equazione cartesiana di W.

(d) Si determini una base ortonormale di W.

Esercizio 3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -8 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva il polinomio caratteristico e si determinino gli autovalori di A.

(b) Si determinino delle basi degli autospazi di A.

(c) Si stabilisca se A è simile a una matrice diagonale D. In caso di risposta affermativa si determini una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare non nulla $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f \circ g = 0$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sia π il piano di equazione $x - 2y + 2z = 1$ e siano $A = (3,0,-1)$ e $B = (1,2,2)$ due punti di π. Si indichi con $\mathscr{C}$ la circonferenza, contenuta nel piano π, di centro A e passante per B.

(a) Si determinino le equazioni parametriche della retta s, contenuta nel piano π, passante per B e tangente alla circonferenza $\mathscr{C}$.

(b) Si determini il punto $B' \in \mathscr{C}$ diametralmente opposto al punto B.

(c) Si determinino i due punti P_1 e P_2 la cui distanza dal piano π è $d = 6$ e la cui proiezione ortogonale su π è il punto A assegnato.

(d) Si determinino le distanze dei punti P_1 e P_2 dalla retta s trovata nel punto (a).