A

Cognome ________________ Nome ________________ Matricola __________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò

4$^{\text{o}}$ Appello — 6 febbraio 2013

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale reale con base v_1, v_2, v_3, v_4. Sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = v_1 - v_2 + v_4$, $u_2 = v_3 + v_4$, $u_3 = v_1 - v_2 - v_3$ e sia $W \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = v_1 - 2v_3$, $w_2 = v_2 + v_4$, $w_3 = v_1 + 2v_3 - v_4$, $w_4 = 2v_1 + v_2$.

(a) Si determini dimensione e base dei sottospazi U e W.

(b) Si determini dimensione e base di $U \cap W$ e $U + W$.

(c) Si determini (la base di) un sottospazio L tale che $U \oplus L = V$.

(d) Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_2$, $f(v_3) = 0$, $f(v_4) = 0$. Si determini dimensione e base dei sottospazi $f(U)$ e $f(W)$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A_{(t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ t+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ove t è un parametro reale.

(a) Si dica per quali valori di t gli autovalori di $A_{(t)}$ sono reali.

(b) Si determini per quali valori di t la matrice ha autovalori con molteplicità maggiore di 1. Per ciascuno dei valori di t così trovati si dica se la matrice corrispondente è diagonalizzabile.

(c) Si determini il valore di t per il quale esiste una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice $A_{(t)}$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, sia dato il sottospazio U di equazione $2x + y - z = 0$.

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane di $U^\perp$.

(b) Dato il vettore $v = (1, 1, -1)$ si determini il vettore v' di norma minima tale che $v + v' \in U$.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) È possibile trovare un sottospazio non nullo $L \subset \mathbb{R}^3$ che sia in somma diretta sia con U che con $U^\perp$? Se un tale L esiste esso è unico? (*le risposte devono essere adeguatamente giustificate).*

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati il punto $P = (1, 1, 5)$ e la retta

$$r : \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini il punto P', simmetrico di P rispetto alla retta r, e il punto H in cui la retta r interseca la retta PP'.

(b) Si determinino due punti A e A' sulla retta r tali che il quadrilatero $APA'P'$ sia un quadrato.

(c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π tale che la proiezione ortogonale di P su tale piano coincida con il punto H.

(d) Si determinino le equazioni parametriche della retta s contenuta nel piano π, passante per H e ortogonale alla retta r.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò

4$^{\text{o}}$ Appello — 6 febbraio 2013

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale reale con base v_1, v_2, v_3, v_4. Sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = 2v_1 - v_3 - v_4$, $u_2 = v_2 + v_4$, $u_3 = 2v_1 + v_2 - v_3$ e sia $W \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = 2v_2 - v_4$, $w_2 = v_1 + v_3$, $w_3 = v_1 - 2v_3 + 2v_4$, $w_4 = 3v_1 + 2v_2 + v_4$.

(a) Si determini dimensione e base dei sottospazi U e W.

(b) Si determini dimensione e base di $U \cap W$ e $U + W$.

(c) Si determini (la base di) un sottospazio L tale che $U \oplus L = V$.

(d) Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 0$, $f(v_3) = v_3$, $f(v_4) = 0$. Si determini dimensione e base dei sottospazi $f(U)$ e $f(W)$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A_{(t)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ t-3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ove t è un parametro reale.

(a) Si dica per quali valori di t gli autovalori di $A_{(t)}$ sono reali.

(b) Si determini per quali valori di t la matrice ha autovalori con molteplicità maggiore di 1. Per ciascuno dei valori di t così trovati si dica se la matrice corrispondente è diagonalizzabile.

(c) Si determini il valore di t per il quale esiste una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice $A_{(t)}$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, sia dato il sottospazio U di equazione $x - 2y + z = 0$.

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane di $U^\perp$.

(b) Dato il vettore $v = (2, -1, -1)$ si determini il vettore v' di norma minima tale che $v + v' \in U$.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) È possibile trovare un sottospazio non nullo $L \subset \mathbb{R}^3$ che sia in somma diretta sia con U che con $U^\perp$? Se un tale L esiste esso è unico ? (*le risposte devono essere adeguatamente giustificate).*

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati il punto $P = (3, 1, 0)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini il punto P', simmetrico di P rispetto alla retta r, e il punto H in cui la retta r interseca la retta PP'.

(b) Si determinino due punti A e A' sulla retta r tali che il quadrilatero $APA'P'$ sia un quadrato.

(c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π tale che la proiezione ortogonale di P su tale piano coincida con il punto H.

(d) Si determinino le equazioni parametriche della retta s contenuta nel piano π, passante per H e ortogonale alla retta r.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò

4º Appello — 6 febbraio 2013

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale reale con base v_1, v_2, v_3, v_4. Sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = v_2 + 2v_3 + v_4$, $u_2 = 2v_1 - 3v_3$, $u_3 = 2v_1 + 2v_2 + v_3 + 2v_4$ e sia $W \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = v_1 + v_3$, $w_2 = v_2 + 2v_4$, $w_3 = -v_1 + 2v_3 + v_4$, $w_4 = v_1 - v_2 + 4v_3 - v_4$.

(a) Si determini dimensione e base dei sottospazi U e W.

(b) Si determini dimensione e base di $U \cap W$ e $U + W$.

(c) Si determini (la base di) un sottospazio L tale che $U \oplus L = V$.

(d) Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = v_2$, $f(v_3) = 0$, $f(v_4) = v_4$. Si determini dimensione e base dei sottospazi $f(U)$ e $f(W)$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A_{(t)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ t-1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ove t è un parametro reale.

(a) Si dica per quali valori di t gli autovalori di $A_{(t)}$ sono reali.

(b) Si determini per quali valori di t la matrice ha autovalori con molteplicità maggiore di 1. Per ciascuno dei valori di t così trovati si dica se la matrice corrispondente è diagonalizzabile.

(c) Si determini il valore di t per il quale esiste una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice $A_{(t)}$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, sia dato il sottospazio U di equazione $x + y + 2z = 0$.

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane di $U^\perp$.

(b) Dato il vettore $v = (1, -1, 2)$ si determini il vettore v' di norma minima tale che $v + v' \in U$.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) È possibile trovare un sottospazio non nullo $L \subset \mathbb{R}^3$ che sia in somma diretta sia con U che con $U^\perp$? Se un tale L esiste esso è unico? (*le risposte devono essere adeguatamente giustificate).*

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati il punto $P = (-1, -1, 5)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + 4y - z + 1 = 0 \\ 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini il punto P', simmetrico di P rispetto alla retta r, e il punto H in cui la retta r interseca la retta PP'.

(b) Si determinino due punti A e A' sulla retta r tali che il quadrilatero $APA'P'$ sia un quadrato.

(c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π tale che la proiezione ortogonale di P su tale piano coincida con il punto H.

(d) Si determinino le equazioni parametriche della retta s contenuta nel piano π, passante per H e ortogonale alla retta r.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò

4º Appello — 6 febbraio 2013

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale reale con base v_1, v_2, v_3, v_4. Sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = 2v_2 - v_4$, $u_2 = v_1 + 2v_2 - v_3$, $u_3 = v_1 - v_3 + v_4$ e sia $W \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = v_1 + v_4$, $w_2 = v_2 + 2v_3$, $w_3 = -v_2 + v_3 + v_4$, $w_4 = 2v_1 + 3v_3 + 3v_4$.

(a) Si determini dimensione e base dei sottospazi U e W.

(b) Si determini dimensione e base di $U \cap W$ e $U + W$.

(c) Si determini (la base di) un sottospazio L tale che $U \oplus L = V$.

(d) Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 0$, $f(v_3) = v_3$, $f(v_4) = 0$. Si determini dimensione e base dei sottospazi $f(U)$ e $f(W)$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A_{(t)} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ t+4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ove t è un parametro reale.

(a) Si dica per quali valori di t gli autovalori di $A_{(t)}$ sono reali.

(b) Si determini per quali valori di t la matrice ha autovalori con molteplicità maggiore di 1. Per ciascuno dei valori di t così trovati si dica se la matrice corrispondente è diagonalizzabile.

(c) Si determini il valore di t per il quale esiste una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice $A_{(t)}$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, sia dato il sottospazio U di equazione $x + 2y - z = 0$.

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane di $U^\perp$.

(b) Dato il vettore $v = (2, -2, 1)$ si determini il vettore v' di norma minima tale che $v + v' \in U$.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) È possibile trovare un sottospazio non nullo $L \subset \mathbb{R}^3$ che sia in somma diretta sia con U che con $U^\perp$? Se un tale L esiste esso è unico? (*le risposte devono essere adeguatamente giustificate).*

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati il punto $P = (5, 0, -4)$ e la retta

$$r : \begin{cases} 2x + z - 3 = 0 \\ 4x - y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini il punto P', simmetrico di P rispetto alla retta r, e il punto H in cui la retta r interseca la retta PP'.

(b) Si determinino due punti A e A' sulla retta r tali che il quadrilatero $APA'P'$ sia un quadrato.

(c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π tale che la proiezione ortogonale di P su tale piano coincida con il punto H.

(d) Si determinino le equazioni parametriche della retta s contenuta nel piano π, passante per H e ortogonale alla retta r.