A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

1º Appello — 19 giugno 2013

Esercizio 1. Sia $V = M_2$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2. Si considerino i seguenti sottospazi di M_2:

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2-2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \right\}$$

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si determini dimensione e base di W_1.

(b) Si determini dimensione e base di W_2.

(c) Per il valore di $t > 0$ per cui W_1 ha dimensione 2, si determini una base di $W_1 \cap W_2$ e una base di $W_1 + W_2$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & t & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determini la dimensione dell'immagine e del nucleo di f.

(b) Per il valore di t per cui il rango di A non è massimo, si determini una base di $\mathrm{Im}(f)$ e una base di $\mathrm{Ker}(f)$.

(c) Si ponga ora $t = 0$. Si dica se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità. Se una tale g esiste, si stabilisca se essa è unica.

Esercizio 3. Dati i vettori $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,2)$, $v_3 = (0,1,1) \in \mathbb{R}^3$, sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente 1 come unico autovalore, con molteplicità algebrica 3, e tale che $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica.

(c) Si determini l'autospazio relativo all'autovalore 1 e si dica se f è diagonalizzabile.

(d) Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia triangolare superiore.

Esercizio 4.

(a) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia r la retta passante per il punto $(1,1,-4)$ e parallela al vettore $(1,2,3)$, e sia s la retta passante per il punto $(6,5,-3)$ e parallela al vettore $(2,1,-1)$. Determinare il punto di incidenza di r e s e scrivere l'equazione cartesiana del piano π che le contiene.

(b) Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, sia r' la retta passante per il punto $(-1,0,-1,2)$ e parallela al vettore $(1,1,2,1)$, e sia s' la retta passante per il punto $(-1,0,0,2)$ e parallela al vettore $(2,2,3,2)$. Determinare il punto di incidenza di r' e s' e scrivere le equazioni cartesiane del piano π' che le contiene.

(c) Determinare la proiezione ortogonale del punto $P = (4,5,1,4)$ sul piano π' trovato al punto (b).

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

1° Appello — 19 giugno 2013

Esercizio 1. Sia $V = M_2$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2. Si considerino i seguenti sottospazi di M_2:

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ t^2-3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si determini dimensione e base di W_1.

(b) Si determini dimensione e base di W_2.

(c) Per il valore di $t > 0$ per cui W_1 ha dimensione 2, si determini una base di $W_1 \cap W_2$ e una base di $W_1 + W_2$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & t & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determini la dimensione dell'immagine e del nucleo di f.

(b) Per il valore di t per cui il rango di A non è massimo, si determini una base di $\mathrm{Im}(f)$ e una base di $\mathrm{Ker}(f)$.

(c) Si ponga ora $t = 0$. Si dica se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità. Se una tale g esiste, si stabilisca se essa è unica.

Esercizio 3. Dati i vettori $v_1 = (1, -1, -2)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$, sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente -1 come unico autovalore, con molteplicità algebrica 3, e tale che $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica.

(c) Si determini l'autospazio relativo all'autovalore -1 e si dica se f è diagonalizzabile.

(d) Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia triangolare superiore.

Esercizio 4.

(a) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia r la retta passante per il punto $(5, 0, 3)$ e parallela al vettore $(2, 1, 1)$, e sia s la retta passante per il punto $(-2, -4, 2)$ e parallela al vettore $(3, 2, -1)$. Determinare il punto di incidenza di r e s e scrivere l'equazione cartesiana del piano π che le contiene.

(b) Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, sia r' la retta passante per il punto $(4, 4, 3, -1)$ e parallela al vettore $(1, 2, 1, -2)$, e sia s' la retta passante per il punto $(0, -2, -1, 1)$ e parallela al vettore $(1, 1, 1, 1)$. Determinare il punto di incidenza di r' e s' e scrivere le equazioni cartesiane del piano π' che le contiene.

(c) Determinare la proiezione ortogonale del punto $P = (4, -6, -3, -1)$ sul piano π' trovato al punto (b).

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

1º Appello — 19 giugno 2013

Esercizio 1. Sia $V = M_2$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2. Si considerino i seguenti sottospazi di M_2:

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & t^2+7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; 2x_1 - 4x_2 + x_4 = 0 \right\}$$

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si determini dimensione e base di W_1.

(b) Si determini dimensione e base di W_2.

(c) Per il valore di $t > 0$ per cui W_1 ha dimensione 2, si determini una base di $W_1 \cap W_2$ e una base di $W_1 + W_2$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & t & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determini la dimensione dell'immagine e del nucleo di f.

(b) Per il valore di t per cui il rango di A non è massimo, si determini una base di $\mathrm{Im}(f)$ e una base di $\mathrm{Ker}(f)$.

(c) Si ponga ora $t = 0$. Si dica se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità. Se una tale g esiste, si stabilisca se essa è unica.

Esercizio 3. Dati i vettori $v_1 = (0, 0, 1)$, $v_2 = (1, -2, 1)$, $v_3 = (1, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$, sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente 1 come unico autovalore, con molteplicità algebrica 3, e tale che $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica.

(c) Si determini l'autospazio relativo all'autovalore 1 e si dica se f è diagonalizzabile.

(d) Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia triangolare superiore.

Esercizio 4.

(a) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia r la retta passante per il punto $(6, -1, 4)$ e parallela al vettore $(1, -1, 2)$, e sia s la retta passante per il punto $(5, 3, 1)$ e parallela al vettore $(2, 1, 3)$. Determinare il punto di incidenza di r e s e scrivere l'equazione cartesiana del piano π che le contiene.

(b) Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, sia r' la retta passante per il punto $(4, 3, -2, 2)$ e parallela al vettore $(2, 2, 1, 1)$, e sia s' la retta passante per il punto $(0, -3, -7, -1)$ e parallela al vettore $(1, 2, 2, 1)$. Determinare il punto di incidenza di r' e s' e scrivere le equazioni cartesiane del piano π' che le contiene.

(c) Determinare la proiezione ortogonale del punto $P = (3, 2, 3, -2)$ sul piano π' trovato al punto (b).

D

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

1º Appello — 19 giugno 2013

Esercizio 1. Sia $V = M_2$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2. Si considerino i seguenti sottospazi di M_2:

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ t^2-9 & -6 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \right\}$$

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si determini dimensione e base di W_1.

(b) Si determini dimensione e base di W_2.

(c) Per il valore di $t > 0$ per cui W_1 ha dimensione 2, si determini una base di $W_1 \cap W_2$ e una base di $W_1 + W_2$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & t & 2 \\ -3 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determini la dimensione dell'immagine e del nucleo di f.

(b) Per il valore di t per cui il rango di A non è massimo, si determini una base di $\mathrm{Im}(f)$ e una base di $\mathrm{Ker}(f)$.

(c) Si ponga ora $t = 0$. Si dica se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità. Se una tale g esiste, si stabilisca se essa è unica.

Esercizio 3. Dati i vettori $v_1 = (2, -1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (-1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$, sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente -1 come unico autovalore, con molteplicità algebrica 3, e tale che $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica.

(c) Si determini l'autospazio relativo all'autovalore -1 e si dica se f è diagonalizzabile.

(d) Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia triangolare superiore.

Esercizio 4.

(a) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia r la retta passante per il punto $(2, 4, 3)$ e parallela al vettore $(2, 3, 1)$, e sia s la retta passante per il punto $(-4, 2, 5)$ e parallela al vettore $(-1, 2, 2)$. Determinare il punto di incidenza di r e s e scrivere l'equazione cartesiana del piano π che le contiene.

(b) Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, sia r' la retta passante per il punto $(3, 5, 1, -7)$ e parallela al vettore $(1, 1, 1, -3)$, e sia s' la retta passante per il punto $(3, 7, 3, -7)$ e parallela al vettore $(1, 2, 2, -3)$. Determinare il punto di incidenza di r' e s' e scrivere le equazioni cartesiane del piano π' che le contiene.

(c) Determinare la proiezione ortogonale del punto $P = (8, 3, 3, -2)$ sul piano π' trovato al punto (b).