Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. F. Bottacin

1^{o} Appello — 27 gennaio 2014

Esercizio 1. (a) Si dia la definizione di diffeomorfismo tra due varietà differenziabili M e N.

(b) Sia $F\colon M \to N$ un diffeomorfismo e sia X un campo di vettori su M. Si spieghi come è definito il campo di vettori F_*X su N.

(c) Sia M la seguente sottovarietà aperta di $\mathbb{R}^2$

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\, y > 0\}.$$

Sia $F\colon M \to M$ la funzione data da $F(x, y) = (xy, y/x)$.
Si dimostri che F è un diffeomorfismo e si calcolino i campi di vettori F_*X e F_*Y, dove

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = y\frac{\partial}{\partial x}$$

Esercizio 2. (a) Si dia la definizione di *connessione lineare* su una varietà differenziabile. Nel caso di una varietà Riemanniana, cosa si intende dicendo che una connessione è *compatibile* con la metrica?

(b) Si dimostri che se ∇ è una connessione compatibile con la metrica su una varietà Riemanniana (M, g), e $A \in \mathcal{T}^1_2(M)$ è tale che

$$\langle A(X, Y), Z\rangle + \langle Y, A(X, Z)\rangle = 0 \qquad (*)$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$, allora $\nabla + A$ è ancora una connessione compatibile con la metrica. Si dimostri inoltre che se ∇_1 e ∇_2 sono due connessioni compatibili con la metrica allora $\nabla_1 - \nabla_2$ è un campo tensoriale di tipo $\binom{1}{2}$ che soddisfa $(*)$.

Esercizio 3. Sia E un fibrato vettoriale di rango r su una varietà differenziabile M. Si dimostri che E è *triviale* (cioè, E è diffeomorfo a $M \times \mathbb{R}^r$) se e solo se esistono r sezioni di E, $s_i\colon M \to E$, per $i = 1, \dots, r$, tali che $\{s_1(P), \dots, s_r(P)\}$ è una base dello spazio vettoriale E_P, per ogni $P \in M$.

Usando questo fatto, si dimostri che un fibrato vettoriale E su M è triviale se e solo se lo è il fibrato duale E^*.

Esercizio 4. Dati due campi di vettori X e Y su una varietà M, si dia la definizione di *derivata di Lie* $\mathcal{L}_X Y$ e si spieghi come si può definire la derivata di Lie $\mathcal{L}_X \omega$ per una 1-forma differenziale ω.

Si considerino poi i seguenti campi di vettori nel piano:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$$

- Si calcoli $[X, Y]$.
- Si calcolino i flussi θ e ψ di X e Y e si verifichi che i flussi non commutano, determinando esplicitamente degli intervalli aperti I e J contenenti 0 tali che $\theta_s \circ \psi_t$ e $\psi_t \circ \theta_s$ siano entrambi definiti, per ogni $(s, t) \in I \times J$, ma $\theta_s \circ \psi_t \neq \psi_t \circ \theta_s$, per qualche (s, t).