**A**

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

**4º Appello — 4 febbraio 2014**

---

**Esercizio 1.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $f(2,1,0) = (2,0,-1,2)$, $f(1,1,0) = (-1,1,t,0)$, $f(-1,2,1) = (3,1,1,4)$, con $t \in \mathbb{R}$.

(a) Si scriva la matrice di $f$ rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(c) Per il valore di $t$ per cui $f$ non è iniettiva, si determini $f^{-1}(-1,1,3,0)$.

**Esercizio 2.** Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3,0,-1,2)$, $u_2 = (-2,1,2,-1)$, $u_3 = (0,3,4,1)$.
Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni

$$W : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ -3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini la dimensione e una base di $U$, la dimensione e una base di $W$.

(b) Si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(c) Si determini, se possibile, una base di un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = \mathbb{R}^4$ e $W \oplus L = \mathbb{R}^4$.

**Esercizio 3.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ t & -2 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini il valore di $t$ per il quale l'immagine di $f$ ha dimensione $< 3$.

(b) Per il valore di $t$ trovato nel punto (a) si determini, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di $f$ è diagonale.

(c) Se una matrice quadrata $B$ è diagonalizzabile, è vero che anche $B^2$ è diagonalizzabile? Se $B^2$ è diagonalizzabile, è vero che anche $B$ lo è?

**Esercizio 4.** Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i piani $\pi_1$ e $\pi_2$ di equazioni

$$\pi_1 : (2-a)x + y + (1+a)z = 2, \qquad \pi_2 : 2x + (2b+1)y + 4z = 1.$$

(a) Si dica per quali valori dei parametri reali $a$ e $b$ i due piani sono paralleli e per quali sono perpendicolari.

(b) Per i valori di $a$ e $b$ per i quali $\pi_1$ è parallelo a $\pi_2$, si determini la distanza tra i due piani.

(c) Dopo aver posto $a = 2$ e $b = 0$, si determini l'equazione parametrica della retta ottenuta intersecando i due piani.

**B**

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

**4º Appello — 4 febbraio 2014**

---

**Esercizio 1.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $f(1,0,1) = (1,-2,0,t)$, $f(1,0,2) = (2,1,-1,0)$, $f(-2,1,1) = (3,4,-2,-2)$, con $t \in \mathbb{R}$.

(a) Si scriva la matrice di $f$ rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(c) Per il valore di $t$ per cui $f$ non è iniettiva, si determini $f^{-1}(1,-2,0,2)$.

**Esercizio 2.** Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2,-3,-1,0)$, $u_2 = (1,-2,1,-2)$, $u_3 = (1,0,-5,6)$.
Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni

$$W : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini la dimensione e una base di $U$, la dimensione e una base di $W$.

(b) Si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(c) Si determini, se possibile, una base di un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = \mathbb{R}^4$ e $W \oplus L = \mathbb{R}^4$.

**Esercizio 3.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ t & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini il valore di $t$ per il quale l'immagine di $f$ ha dimensione $< 3$.

(b) Per il valore di $t$ trovato nel punto (a) si determini, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di $f$ è diagonale.

(c) Se una matrice quadrata $B$ è diagonalizzabile, è vero che anche $B^2$ è diagonalizzabile? Se $B^2$ è diagonalizzabile, è vero che anche $B$ lo è?

**Esercizio 4.** Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i piani $\pi_1$ e $\pi_2$ di equazioni

$$\pi_1 : x + (1-a)y + az = 4, \qquad \pi_2 : (1+b)x + 4y - 2z = 1.$$

(a) Si dica per quali valori dei parametri reali $a$ e $b$ i due piani sono paralleli e per quali sono perpendicolari.

(b) Per i valori di $a$ e $b$ per i quali $\pi_1$ è parallelo a $\pi_2$, si determini la distanza tra i due piani.

(c) Dopo aver posto $a = 1$ e $b = 2$, si determini l'equazione parametrica della retta ottenuta intersecando i due piani.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

**4º Appello — 4 febbraio 2014**

---

**Esercizio 1.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $f(0,-2,1) = (0,-1,2,-1)$, $f(0,1,-1) = (-1,0,t,1)$, $f(1,1,2) = (1,-2,5,-3)$, con $t \in \mathbb{R}$.

(a) Si scriva la matrice di $f$ rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(c) Per il valore di $t$ per cui $f$ non è iniettiva, si determini $f^{-1}(0,-1,2,-1)$.

**Esercizio 2.** Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (0,2,-1,3)$, $u_2 = (1,-1,2,-2)$, $u_3 = (3,1,4,0)$.
Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni

$$W : \begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini la dimensione e una base di $U$, la dimensione e una base di $W$.

(b) Si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(c) Si determini, se possibile, una base di un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = \mathbb{R}^4$ e $W \oplus L = \mathbb{R}^4$.

**Esercizio 3.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ t & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini il valore di $t$ per il quale l'immagine di $f$ ha dimensione $< 3$.

(b) Per il valore di $t$ trovato nel punto (a) si determini, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di $f$ è diagonale.

(c) Se una matrice quadrata $B$ è diagonalizzabile, è vero che anche $B^2$ è diagonalizzabile? Se $B^2$ è diagonalizzabile, è vero che anche $B$ lo è?

**Esercizio 4.** Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i piani $\pi_1$ e $\pi_2$ di equazioni

$$\pi_1 : (a-1)x + (3-2a)y + z = 2, \qquad \pi_2 : 2x - 2y + (3+b)z = 3.$$

(a) Si dica per quali valori dei parametri reali $a$ e $b$ i due piani sono paralleli e per quali sono perpendicolari.

(b) Per i valori di $a$ e $b$ per i quali $\pi_1$ è parallelo a $\pi_2$, si determini la distanza tra i due piani.

(c) Dopo aver posto $a = 1$ e $b = 2$, si determini l'equazione parametrica della retta ottenuta intersecando i due piani.

**D**

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

**4º Appello — 4 febbraio 2014**

---

**Esercizio 1.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $f(2,0,-1) = (-1,3,2,t)$, $f(1,0,-1) = (-1,2,0,-1)$, $f(1,1,2) = (-3,7,2,-1)$, con $t \in \mathbb{R}$.

(a) Si scriva la matrice di $f$ rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(c) Per il valore di $t$ per cui $f$ non è iniettiva, si determini $f^{-1}(2,-3,2,4)$.

**Esercizio 2.** Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3,-1,0,2)$, $u_2 = (2,-2,-1,2)$, $u_3 = (0,4,3,-2)$.
Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni

$$W : \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini la dimensione e una base di $U$, la dimensione e una base di $W$.

(b) Si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(c) Si determini, se possibile, una base di un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = \mathbb{R}^4$ e $W \oplus L = \mathbb{R}^4$.

**Esercizio 3.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} t & -8 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini il valore di $t$ per il quale l'immagine di $f$ ha dimensione $< 3$.

(b) Per il valore di $t$ trovato nel punto (a) si determini, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di $f$ è diagonale.

(c) Se una matrice quadrata $B$ è diagonalizzabile, è vero che anche $B^2$ è diagonalizzabile? Se $B^2$ è diagonalizzabile, è vero che anche $B$ lo è?

**Esercizio 4.** Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i piani $\pi_1$ e $\pi_2$ di equazioni

$$\pi_1 : 2x + (2-a)y + (2a-5)z = 1, \qquad \pi_2 : (1+b)x - 2y + 2z = 3.$$

(a) Si dica per quali valori dei parametri reali $a$ e $b$ i due piani sono paralleli e per quali sono perpendicolari.

(b) Per i valori di $a$ e $b$ per i quali $\pi_1$ è parallelo a $\pi_2$, si determini la distanza tra i due piani.

(c) Dopo aver posto $a = 2$ e $b = 0$, si determini l'equazione parametrica della retta ottenuta intersecando i due piani.