Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. F. Bottacin

2º Appello — 25 febbraio 2014

Esercizio 1. (a) Si dia la definizione di fibrato vettoriale su una varietà M e di sezione di un fibrato vettoriale su un aperto $U \subset M$.

(b) Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale (di classe C^∞) su una varietà differenziabile M e sia $s\colon M \to E$ una sezione (di classe C^∞). Si dimostri che s è un *embedding* di M in E.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P}^n$ lo spazio proiettivo n-dimensionale reale, identificato con l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione 1 di $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $P \in \mathbb{P}^n$ indichiamo con $r_P \subset \mathbb{R}^{n+1}$ il corrispondente sottospazio vettoriale (r_P è una retta passante per l'origine in $\mathbb{R}^{n+1}$).
Consideriamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$

$$E = \{(P, v) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in r_P\}$$

e definiamo $\pi\colon E \to \mathbb{P}^n$, $(P, v) \mapsto P$.
(a) Si verifichi che E è un fibrato vettoriale di rango 1 su $\mathbb{P}^n$.

(b) Si determinino le funzioni di transizione per E sull'intersezione degli aperti U_i e U_j definiti da

$$U_i = \{[x^0 : x^1 : \ldots : x^n] \in \mathbb{P}^n \mid x^i \neq 0\}, \qquad U_j = \{[x^0 : x^1 : \ldots : x^n] \in \mathbb{P}^n \mid x^j \neq 0\}.$$

Esercizio 3. Sia ∇ una connessione lineare su M.
(a) Si dia la definizione di torsione di ∇ e di curvatura.

(b) Indichiamo con τ la torsione di ∇ e poniamo $\tilde{\nabla} = \nabla - \frac{1}{2}\tau$. Si dimostri che $\tilde{\nabla}$ è una connessione lineare su M e che essa è priva di torsione.

Esercizio 4. (a) Si dia la definizione di distribuzione (e di distribuzione involutiva) su una varietà M.

(b) Sia D la distribuzione in $\mathbb{R}^3$ generata dai campi vettoriali

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Si stabilisca se D è involutiva.

(c) Si dica se esiste una sottovarietà integrale di D passante per l'origine. Nel caso essa esista, la si determini esplicitamente.

Esercizio 5. Sia $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ il 2-toro, definito come l'insieme dei punti $(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ tali che $w^2 + x^2 = y^2 + z^2 = 1$, con l'orientazione determinata dall'orientazione standard di S^1. Si calcoli

$$\int_{T^2} \omega,$$

dove ω è la seguente 2-forma su $\mathbb{R}^4$: $\omega = xyz\, dw \wedge dy$.