Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. F. Bottacin

3° Appello — 1 luglio 2014

Esercizio 1. (a) Si dimostri che il cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ è diffeomorfo al piano privato dell'origine, $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$.
(b) Generalizzando quanto fatto nel punto (a), si dimostri che la varietà $S^n \times \mathbb{R}$ è diffeomorfa a $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$.

Esercizio 2. Sia $M_a \subset \mathbb{R}^5$ ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) il sottoinsieme definito dalle seguenti equazioni

$$M_a : \begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 + (x^5)^2 = 1 \\ (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = a \end{cases}$$

(a) Si dimostri che, per $0 < a < 1$, M_a è una sottovarietà compatta di $\mathbb{R}^5$, di dimensione 3.
(b) Si dimostri che, per $a > 1$, $M_a = \varnothing$, mentre M_1 è una sottovarietà di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 1.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ la seguente sottovarietà aperta

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

Sia D la distribuzione su U generata dai campi vettoriali

$$X = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}.$$

(a) Si stabilisca se D è involutiva.
(b) Si determini esplicitamente una carta globale piatta per D su U.

Esercizio 4. Sia M una varietà differenziabile, $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo di vettori su M e $\omega \in A^1(M)$ una 1-forma differenziale.
(a) Si definisca la derivata di Lie $\mathcal{L}_X(\omega)$ e si spieghi come questa può essere effettivamente calcolata.
(b) Sia $(x^1, \dots, x^n)$ un sistema di coordinate locali in M. Si verifichi che, se scriviamo $X = X^i\,\partial_i$ e $\omega = \omega_j\,dx^j$, allora si ha

$$\mathcal{L}_X(\omega) = \big(X^i\,\partial_i\omega_j + \omega_i\,\partial_j X^i\big)\,dx^j.$$

Esercizio 5. Siano M e N varietà differenziabili orientate, di dimensione m e n, rispettivamente, e dotiamo $M \times N$ dell'orientazione prodotto. Siano p_M e p_N le proiezioni di $M \times N$ su M e N, rispettivamente. Se $\alpha \in \Omega^m(M)$ e $\beta \in \Omega^n(N)$ hanno supporto compatto, si dimostri che $(p_M^*\alpha) \wedge (p_N^*\beta)$ è una $(m+n)$-forma a supporto compatto su $M \times N$. Si dimostri poi il "Teorema di Fubini"

$$\int_{M\times N} (p_M^*\alpha) \wedge (p_N^*\beta) = \Big(\int_M \alpha\Big)\Big(\int_N \beta\Big)$$