Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

GEOMETRIA DIFFERENZIALE (Matematici)

Prof. F. Bottacin

1º Appello — 27 gennaio 2015

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ con coordinate (x, y, z, w) si considerino i seguenti campi vettoriali:

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Z = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}$$

(a) Si dia la definizione di distribuzione, distribuzione involutiva e distribuzione integrabile su una varietà M.

(b) Si dimostri che i campi vettoriali X, Y, Z generano una distribuzione integrabile di dimensione 2 su $M = \mathbb{R}^4 \smallsetminus \{(0, 0, 0, w) \mid w \in \mathbb{R}\}$.

(c) Si descrivano le sottovarietà integrali di tale distribuzione.

Esercizio 2. Sia (M, g) una varietà Riemanniana e sia $f\colon M \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Dato un valore regolare $c \in \mathbb{R}$ di f, poniamo $N_c = f^{-1}(c)$.

(a) Si dia la definizione di gradiente di f.

(b) Si dimostri che, per ogni $P \in N_c$, il vettore $\operatorname{grad} f|_P$ è ortogonale al sottospazio $T_P N_c$ (si intende ortogonale rispetto alla metrica g di M).

(c) Sia $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$, con la metrica indotta dal prodotto scalare usuale di $\mathbb{R}^3$. Usando le coordinate locali

$$(\theta, \phi) \mapsto (x = \cos\theta \, \sin\phi, y = \sin\theta \, \sin\phi, z = \cos\phi),$$

si determini esplicitamente l'espressione del gradiente di una funzione $f\colon M \to \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si considerino i seguenti campi vettoriali, definiti in un opportuno sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$:

$$X = (z - 2y)\frac{\partial}{\partial x} + (2x - z)\frac{\partial}{\partial y} + (y - x)\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Y = (x^2 - 1)\frac{\partial}{\partial x} + (xy + z)\frac{\partial}{\partial y} + (xz - y)\frac{\partial}{\partial z}$$

(a) Si verifichi che X e Y sono campi vettoriali tangenti alla sfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

(b) Si calcoli la derivata di Lie $Z := \mathcal{L}_X Y$ e si stabilisca se Z è tangente a S^2.

(c) Data la forma differenziale $\omega = \mathrm{d}x$, se ne calcoli la derivata di Lie $\mathcal{L}_X \omega$.

Esercizio 4. (a) Si definisca la nozione di funzione differenziabile tra due varietà differenziabili. Si dia inoltre la definizione di diffeomorfismo locale e di diffeomorfismo (globale) tra due varietà differenziabili.

(b) Sia $F\colon M \to N$ un diffeomorfismo e sia X un campo di vettori su M. Si spieghi come è definito il campo di vettori $F_* X$ su N.

(c) Sia $F\colon (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ la funzione data da

$$F(\alpha, \beta) = \big((R + r\cos\alpha)\cos\beta, (R + r\cos\alpha)\sin\beta, r\sin\alpha\big)$$

ove r, R sono due numeri reali, con $R > r > 0$.
Si dimostri che l'immagine di F è contenuta nella sottovarietà M di $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$M : (x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - R^2)^2 + 4R^2z^2 = 4R^2r^2$$

(in effetti, F è un diffeomorfismo tra $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ e un sottoinsieme aperto denso di M).

(d) Si calcoli il valore del campo vettoriale $F_*\big(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\big)$ nel punto di M corrispondente a $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$.

(e) Data la 1-forma $\eta = z\,dy$ e la 2-forma $\omega = dx \wedge dy$ su M, si calcoli $F^*(\eta)$ e $F^*(\omega)$.