A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

4º Appello — 5 febbraio 2015

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale delle funzioni lineari $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ sia V il sottospazio generato dalle funzioni f_1, f_2, f_3, ove:

$$f_1(x_1,\dots,x_4) = 2x_1 - x_2 + x_4, \quad f_2(x_1,\dots,x_4) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4, \quad f_3(x_1,\dots,x_4) = 3x_1 - 4x_2 + x_3.$$

(a) Si determini la dimensione e una base di V.

(b) Si determini una funzione lineare $f \in V$ tale che $f(1,0,0,0) = 5$ e $f(0,0,0,1) = 4$.

(c) Si determini l'intersezione dei nuclei di tutte le $f \in V$.

(d) Sia $W = \{f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \mid f \text{ è lineare e } f(1,1,-2,-2) = 0\}$. Si determini una base di $V \cap W$.

Esercizio 2. Si considerino i vettori $v_1 = (1,2,-3)$, $v_2 = (1,3,-1)$, $v_3 = (2, t^2+4, -4)$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Si determini per quali valori di t i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

(b) Si dica per quali valori di t esiste una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = (3,0,-2)$, $f(v_2) = (t-4, 1-t, 2)$ e $\mathrm{Ker}(f)$ sia generato da v_3. In particolare, per i valori di t trovati al punto (a), si dica se una tale funzione lineare f esiste e se essa è unica.

(c) Si ponga ora $t = 0$. Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $g(e_1) = v_2 + v_3$, $g(e_2) = v_1 + v_3$, $g(e_3) = v_1 + v_2$ (ove e_1, e_2, e_3 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$). Si determini la matrice di $f \circ g$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1,0,2,-1)$, $u_2 = (2,-1,3,0)$, $u_3 = (0,1,1,-2)$.

(a) Si determini una base ortogonale di U.

(b) Si determini una base di $U^\perp$.

(c) Si scrivano le equazioni cartesiane di U.

(d) Dato il vettore $v = (0,-4,2,-6)$, si determini un vettore w di norma minima tale che $v + w \in U$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono date le rette r e s di equazioni

$$r: \begin{cases} 2y + z + 1 = 0 \\ x + 3y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo a s.

(b) Si determini l'equazione parametrica della retta ℓ parallela al vettore $v = (1,2,-1)$ e incidente le rette r e s. Si determinino inoltre le coordinate dei punti di incidenza di ℓ con r e s.

(c) Si determinino le equazioni parametriche delle due rette r_1 e r_2 contenute nel piano π (trovato al punto (a)), parallele a r e distanti $\sqrt{210}$ da r.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

4º Appello — 5 febbraio 2015

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale delle funzioni lineari $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ sia V il sottospazio generato dalle funzioni f_1, f_2, f_3, ove:

$$f_1(x_1,\dots,x_4) = 2x_2+x_3+x_4, \quad f_2(x_1,\dots,x_4) = x_1-2x_2+x_3-x_4, \quad f_3(x_1,\dots,x_4) = 2x_1-2x_2+3x_3-x_4.$$

(a) Si determini la dimensione e una base di V.

(b) Si determini una funzione lineare $f \in V$ tale che $f(0,0,1,0) = 4$ e $f(0,0,0,1) = 2$.

(c) Si determini l'intersezione dei nuclei di tutte le $f \in V$.

(d) Sia $W = \{f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \mid f \text{ è lineare e } f(2,1,2,1) = 0\}$. Si determini una base di $V \cap W$.

Esercizio 2. Si considerino i vettori $v_1 = (2,-2,1)$, $v_2 = (2,1,2)$, $v_3 = (4, t^2+2t-7, 1)$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Si determini per quali valori di t i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

(b) Si dica per quali valori di t esiste una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = (2,-1,0)$, $f(v_2) = (-3t,-3,t+2)$ e $\mathrm{Ker}(f)$ sia generato da v_3. In particolare, per i valori di t trovati al punto (a), si dica se una tale funzione lineare f esiste e se essa è unica.

(c) Si ponga ora $t = 1$. Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $g(e_1) = v_2 + v_3$, $g(e_2) = v_1 + v_3$, $g(e_3) = v_1 + v_2$ (ove e_1, e_2, e_3 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$). Si determini la matrice di $f \circ g$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2,1,0,1)$, $u_2 = (1,0,-2,-1)$, $u_3 = (0,1,4,3)$.

(a) Si determini una base ortogonale di U.

(b) Si determini una base di $U^\perp$.

(c) Si scrivano le equazioni cartesiane di U.

(d) Dato il vettore $v = (2,7,3,5)$, si determini un vettore w di norma minima tale che $v + w \in U$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} 2y - z - 2 = 0 \\ x + y - z - 4 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo a s.

(b) Si determini l'equazione parametrica della retta ℓ parallela al vettore $v = (2,-1,1)$ e incidente le rette r e s. Si determinino inoltre le coordinate dei punti di incidenza di ℓ con r e s.

(c) Si determinino le equazioni parametriche delle due rette r_1 e r_2 contenute nel piano π (trovato al punto (a)), parallele a r e distanti $\sqrt{210}$ da r.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

4º Appello — 5 febbraio 2015

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale delle funzioni lineari $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ sia V il sottospazio generato dalle funzioni f_1, f_2, f_3, ove:

$$f_1(x_1,\dots,x_4) = 2x_1 - x_3 - 2x_4, \quad f_2(x_1,\dots,x_4) = x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \quad f_3(x_1,\dots,x_4) = x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4.$$

(a) Si determini la dimensione e una base di V.

(b) Si determini una funzione lineare $f \in V$ tale che $f(1,0,0,0) = 4$ e $f(0,0,1,0) = -3$.

(c) Si determini l'intersezione dei nuclei di tutte le $f \in V$.

(d) Sia $W = \{f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \mid f \text{ è lineare e } f(1,1,1,-2) = 0\}$. Si determini una base di $V \cap W$.

Esercizio 2. Si considerino i vettori $v_1 = (1,2,-2)$, $v_2 = (2,1,-2)$, $v_3 = (2, t^2+3, -6)$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Si determini per quali valori di t i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

(b) Si dica per quali valori di t esiste una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = (0,2,-1)$, $f(v_2) = (t-2, 3t+2, -4)$ e $\operatorname{Ker}(f)$ sia generato da v_3. In particolare, per i valori di t trovati al punto (a), si dica se una tale funzione lineare f esiste e se essa è unica.

(c) Si ponga ora $t = 0$. Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $g(e_1) = v_2 + v_3$, $g(e_2) = v_1 + v_3$, $g(e_3) = v_1 + v_2$ (ove e_1, e_2, e_3 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$). Si determini la matrice di $f \circ g$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (0,1,-2,-1)$, $u_2 = (3,-1,0,2)$, $u_3 = (3,1,-4,0)$.

(a) Si determini una base ortogonale di U.

(b) Si determini una base di $U^\perp$.

(c) Si scrivano le equazioni cartesiane di U.

(d) Dato il vettore $v = (2,-3,-8,-2)$, si determini un vettore w di norma minima tale che $v + w \in U$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x + 3y - z + 3 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 4x + y - z + 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo a s.

(b) Si determini l'equazione parametrica della retta ℓ parallela al vettore $v = (1,3,1)$ e incidente le rette r e s. Si determinino inoltre le coordinate dei punti di incidenza di ℓ con r e s.

(c) Si determinino le equazioni parametriche delle due rette r_1 e r_2 contenute nel piano π (trovato al punto (a)), parallele a r e distanti $\sqrt{11}$ da r.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

4º Appello — 5 febbraio 2015

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale delle funzioni lineari $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ sia V il sottospazio generato dalle funzioni f_1, f_2, f_3, ove:

$$f_1(x_1,\dots,x_4) = 2x_1 - 2x_2 + x_3, \quad f_2(x_1,\dots,x_4) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4, \quad f_3(x_1,\dots,x_4) = 2x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4.$$

(a) Si determini la dimensione e una base di V.

(b) Si determini una funzione lineare $f \in V$ tale che $f(0,1,0,0) = -5$ e $f(0,0,1,0) = 7$.

(c) Si determini l'intersezione dei nuclei di tutte le $f \in V$.

(d) Sia $W = \{f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \mid f \text{ è lineare e } f(2,1,-1,2) = 0\}$. Si determini una base di $V \cap W$.

Esercizio 2. Si considerino i vettori $v_1 = (2,1,-1)$, $v_2 = (4,-1,-1)$, $v_3 = (2, t^2 - t - 2, 0)$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Si determini per quali valori di t i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

(b) Si dica per quali valori di t esiste una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = (1,-2,3)$, $f(v_2) = (2t-1, -2, t+2)$ e $\operatorname{Ker}(f)$ sia generato da v_3. In particolare, per i valori di t trovati al punto (a), si dica se una tale funzione lineare f esiste e se essa è unica.

(c) Si ponga ora $t = 2$. Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $g(e_1) = v_2 + v_3$, $g(e_2) = v_1 + v_3$, $g(e_3) = v_1 + v_2$ (ove e_1, e_2, e_3 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$). Si determini la matrice di $f \circ g$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1,-2,1,0)$, $u_2 = (0,3,-1,1)$, $u_3 = (3,0,1,2)$.

(a) Si determini una base ortogonale di U.

(b) Si determini una base di $U^\perp$.

(c) Si scrivano le equazioni cartesiane di U.

(d) Dato il vettore $v = (2,-1,-5,2)$, si determini un vettore w di norma minima tale che $v + w \in U$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 3x + y - z - 5 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo a s.

(b) Si determini l'equazione parametrica della retta ℓ parallela al vettore $v = (2,1,-3)$ e incidente le rette r e s. Si determinino inoltre le coordinate dei punti di incidenza di ℓ con r e s.

(c) Si determinino le equazioni parametriche delle due rette r_1 e r_2 contenute nel piano π (trovato al punto (a)), parallele a r e distanti $\sqrt{210}$ da r.