A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

1$^{\text{o}}$ Appello — 17 giugno 2015

Esercizio 1. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0$ e sia $v = (1, 0, 2, 1) \in V$. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, -1, -2)$.

(a) Si scriva una base di V che contenga il vettore v assegnato.

(b) Si calcoli la dimensione di $U + V$ e si dica se tale somma è diretta.

(c) Si calcoli la dimensione e una base di $U \cap V$.

(d) Si dica se è possibile trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta sia con U che con V. Se un tale sottospazio esiste se ne determini una base, altrimenti si spieghi perché un tale W non può esistere.

Esercizio 2. Sia $u_t = (1, t, 1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito ponendo $f(x, y, z) = (x - y + 2z)\, u_t$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica e si determini una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Si determini per quale valore del parametro t l'endomorfismo f *non è* diagonalizzabile.

(c) Per i valori di t diversi da quello precedentemente determinato, si scriva una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Si determini una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice associata a f abbia la seconda e la terza riga nulle.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che $U^\perp$ ha equazione $3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

(c) Dato $v = (-1, 3, 1, 5)$ si determini il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$.

(d) Si determini un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 1, tale che la proiezione del vettore $v = (-1, 3, 1, 5)$ su $U^\perp$ parallelamente a L sia $w' = (0, 2, -2, -3)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia r la retta passante per il punto $(1, -2, -2)$ e parallela al vettore $(3, 1, t)$, e sia π il piano di equazione $3x - y + 2z - 1 = 0$.

(a) Si determini il valore di t per il quale la retta r è contenuta nel piano π. Per tale valore di t, si determini l'equazione cartesiana del piano σ, contenente la retta r, che forma un angolo retto con il piano π.

(b) Si determini la proiezione ortogonale A' del punto $A = (-7, 2, -2)$ sul piano π e la distanza di A' dalla retta r.

(c) Si determini il raggio della circonferenza ottenuta dall'intersezione della sfera di raggio 1 centrata nell'origine con il piano π.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, N. Rodinò, R. Sánchez

1° Appello — 17 giugno 2015

Esercizio 1. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $3x_1 + x_2 - 4x_4 = 0$ e sia $v = (2, -2, 0, 1) \in V$. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1, 0)$.

(a) Si scriva una base di V che contenga il vettore v assegnato.

(b) Si calcoli la dimensione di $U + V$ e si dica se tale somma è diretta.

(c) Si calcoli la dimensione e una base di $U \cap V$.

(d) Si dica se è possibile trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta sia con U che con V. Se un tale sottospazio esiste se ne determini una base, altrimenti si spieghi perché un tale W non può esistere.

Esercizio 2. Sia $u_t = (1, t, -1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito ponendo $f(x, y, z) = (x + 2y - z)\, u_t$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica e si determini una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Si determini per quale valore del parametro t l'endomorfismo f *non è* diagonalizzabile.

(c) Per i valori di t diversi da quello precedentemente determinato, si scriva una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Si determini una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice associata a f abbia la seconda e la terza riga nulle.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che $U^\perp$ ha equazione $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 + x_4 = 0$.

(c) Dato $v = (2, 5, -3, -7)$ si determini il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$.

(d) Si determini un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 1, tale che la proiezione del vettore $v = (2, 5, -3, -7)$ su $U^\perp$ parallelamente a L sia $w' = (1, 1, 3, -1)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia r la retta passante per il punto $(3, -2, 3)$ e parallela al vettore $(t, -1, 1)$, e sia π il piano di equazione $x + 2y - z + 4 = 0$.

(a) Si determini il valore di t per il quale la retta r è contenuta nel piano π. Per tale valore di t, si determini l'equazione cartesiana del piano σ, contenente la retta r, che forma un angolo retto con il piano π.

(b) Si determini la proiezione ortogonale A' del punto $A = (2, 5, -2)$ sul piano π e la distanza di A' dalla retta r.

(c) Si determini il raggio della circonferenza ottenuta dall'intersezione della sfera di raggio 3 centrata nell'origine con il piano π.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, N. Rodinò, R. Sánchez

1º Appello — 17 giugno 2015

Esercizio 1. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $2x_1 - x_3 + 5x_4 = 0$ e sia $v = (-2, 0, 1, 1) \in V$. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, 2, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 1, 1)$.

(a) Si scriva una base di V che contenga il vettore v assegnato.

(b) Si calcoli la dimensione di $U + V$ e si dica se tale somma è diretta.

(c) Si calcoli la dimensione e una base di $U \cap V$.

(d) Si dica se è possibile trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta sia con U che con V. Se un tale sottospazio esiste se ne determini una base, altrimenti si spieghi perché un tale W non può esistere.

Esercizio 2. Sia $u_t = (2, t, -1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito ponendo $f(x, y, z) = (2x - y - z)\, u_t$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica e si determini una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Si determini per quale valore del parametro t l'endomorfismo f *non è* diagonalizzabile.

(c) Per i valori di t diversi da quello precedentemente determinato, si scriva una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Si determini una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice associata a f abbia la seconda e la terza riga nulle.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che $U^\perp$ ha equazione $x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

(c) Dato $v = (2, -7, 8, -5)$ si determini il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$.

(d) Si determini un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 1, tale che la proiezione del vettore $v = (2, -7, 8, -5)$ su $U^\perp$ parallelamente a L sia $w' = (5, -2, 1, 3)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia r la retta passante per il punto $(4, 1, 4)$ e parallela al vettore $(2, t, -1)$, e sia π il piano di equazione $x - 3y - z + 3 = 0$.

(a) Si determini il valore di t per il quale la retta r è contenuta nel piano π. Per tale valore di t, si determini l'equazione cartesiana del piano σ, contenente la retta r, che forma un angolo retto con il piano π.

(b) Si determini la proiezione ortogonale A' del punto $A = (4, -4, -3)$ sul piano π e la distanza di A' dalla retta r.

(c) Si determini il raggio della circonferenza ottenuta dall'intersezione della sfera di raggio 2 centrata nell'origine con il piano π.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, N. Rodinò, R. Sánchez

1º Appello — 17 giugno 2015

Esercizio 1. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0$ e sia $v = (0, 3, 2, -1) \in V$. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 1, 0, -2)$, $u_2 = (2, 0, 1, 2)$.

(a) Si scriva una base di V che contenga il vettore v assegnato.

(b) Si calcoli la dimensione di $U + V$ e si dica se tale somma è diretta.

(c) Si calcoli la dimensione e una base di $U \cap V$.

(d) Si dica se è possibile trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta sia con U che con V. Se un tale sottospazio esiste se ne determini una base, altrimenti si spieghi perché un tale W non può esistere.

Esercizio 2. Sia $u_t = (1, t, -2) \in \mathbb{R}^3$ e sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito ponendo $f(x, y, z) = (x - 2y + 2z)\, u_t$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica e si determini una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Si determini per quale valore del parametro t l'endomorfismo f *non è* diagonalizzabile.

(c) Per i valori di t diversi da quello precedentemente determinato, si scriva una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Si determini una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice associata a f abbia la seconda e la terza riga nulle.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che $U^\perp$ ha equazione $3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 + x_4 = 0$.

(c) Dato $v = (0, 4, -3, 4)$ si determini il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$.

(d) Si determini un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 1, tale che la proiezione del vettore $v = (0, 4, -3, 4)$ su $U^\perp$ parallelamente a L sia $w' = (2, -1, -1, 6)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia r la retta passante per il punto $(1, 3, 1)$ e parallela al vettore $(t, -4, 1)$, e sia π il piano di equazione $2x + y - 2z - 3 = 0$.

(a) Si determini il valore di t per il quale la retta r è contenuta nel piano π. Per tale valore di t, si determini l'equazione cartesiana del piano σ, contenente la retta r, che forma un angolo retto con il piano π.

(b) Si determini la proiezione ortogonale A' del punto $A = (4, 4, 0)$ sul piano π e la distanza di A' dalla retta r.

(c) Si determini il raggio della circonferenza ottenuta dall'intersezione della sfera di raggio 2 centrata nell'origine con il piano π.