Algebra Lineare e Geometria

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, N. Rodinò, R. Sànchez

1^o Appello, tema B, 17 giugno 2015

Esercizio 1. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $3x_1 + x_2 - 4x_4 = 0$ e sia $v = (2, -2, 0, 1) \in V$. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1, 0)$.

(a) Si scriva una base di V che contenga il vettore v assegnato.

(b) Si calcoli la dimensione di $U + V$ e si dica se tale somma è diretta.

(c) Si calcoli la dimensione e una base di $U \cap V$.

(d) Si dica se è possibile trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta sia con U che con V. Se un tale sottospazio esiste se ne determini una base, altrimenti si spieghi perché un tale W non può esistere.

Soluzione (a) Detta f la forma lineare non nulla $f\colon (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto 3x_1 + x_2 - 4x_4$, V ha dimensione 3 in quanto nucleo di f. I vettori

$$(2, -2, 0, 1), (0, 4, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$$

appartengono a $\mathrm{Ker}(f)$, sono linearmente indipendenti, perché formano le righe di una matrice con forma a scala, e quindi costituiscono una base di V.
(b) Poiché u_2 non appartiene a V, $U + V$ ha dimensione 4 e quindi coincide con $\mathbb{R}^4$. La formula di Grassman dà $\dim(U \cap V) = 5 - 4 = 1$ e la somma non è diretta.
(c) Sostituendo nell' equazione del sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^4$ alle indeterminate le coordinate del vettore $u_1 + \lambda u_2$, si ottiene $-2 + 4\lambda = 0$ e pertanto il vettore non nullo $2(1, -1, 0, 1) + (1, 1, 1, 0) = (3, -1, 1, 2)$ appartiene a $U \cap V$, del quale forma una base.
(d) Il sottospazio vettoriale banale $\{ (0, 0, 0, 0) \}$ ha la proprietà richiesta, condivisa dal sottospazio vettoriale $< e_4 >$ di dimensione 1, giacché e_4 non appartiene a U né a V.

Esercizio 2. Sia $u_t = (1, t, -1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito mediante la posizione

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z)\, u_t.$$

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica e si determini una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Si determini per quale valore del parametro t l'endomorfismo f non è diagonalizzabile.

(c) Per i valori di t diversi da quello precedentemente determinato, si scriva una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Si determini una base $\{ w_1, w_2, w_3 \}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice associata a f abbia la seconda e la terza riga nulle.

Soluzione (a) La matrice, che ha per colonne le coordinate dei vettori $f(e_1)$, $f(e_2)$ e $f(e_3)$, è

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ t & 2t & -t \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avendo $M_C(f)$ rango uno, in accordo con il teorema del rango e della nullità, una base del nucleo di f è $\big((1, 0, 1), (0, 1, 2)\big)$, indipendente dal parametro t, e una dell'immagine è formata dal vettore $u_t = (1, t, -1)$.
(b) Poiché $f(u_t) = (2 + 2t)\,(1, t, -1)$, u_t è un autovettore relativo all'autovalore $2 + 2t$. Se t è diverso da -1, l'endomorfismo f ha due autovalori di molteplicità algebriche e geometriche rispettivamente 1 e 2, quindi è diagonalizzabile, mentre, se $t = -1$, ha come unico autovalore 0, e f, non essendo nullo, non è diagonalizzabile.

(c) Se $t \neq -1$, il vettore u_t non appartiene a $\ker(f)$, quindi i vettori $(1,t,-1),(1,0,1),(0,1,2)$ costituiscono una base ordinata B di autovettori, relativamente alla quale la matrice $M_B(f)$, associata all'endomorfismo f, è la matrice diagonale di coefficienti diagonali $2+2t$, 0, 0.

(d) Se $t \neq -1$, la matrice $M_B(f)$ ha la seconda e la terza riga nulle, ma, qualunque sia $t \in \mathbb{R}$, la matrice associata all'endomorfismo f, relativamente alla base a scala $\big(u_t, e_2, e_3\big)$, ha la proprietà richiesta poiché le immagini dei suoi vettori sono multipli di u_t.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che $U^\perp$ ha equazione $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 + x_4 = 0$.

(c) Dato $v = (2,5,-3,-7)$, si determini il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$.

(d) Si determini un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 1, tale che la proiezione del vettore $v = (2,5,-3,-7)$ su $U^\perp$ parallelamente a L sia $w' = (1,1,3,-1)$.

Soluzione (a) Chiaramente, in quanto nucleo di una forma lineare, $U^\perp$ ha dimensione 3, del quale i vettori a scala

$$(1,-2,0,0),(0,2,1,0),(0,0,3,-2)$$

costituiscono una base. L'ortogonale $U^{\perp\perp} = U$ di $U^\perp$ ha dimensione 1 e quindi è generato dal vettore $(2,1,-2,-3)$, poiché $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = (2,1,-2,-3)\cdot(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0$, per ogni (x_1,x_2,x_3,x_4) appartenente a $U^\perp$.

(b) Una base di $U^\perp \cap V$ può essere scritta usando il metodo dei determinanti a segni alterni:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (2,-2,1,0) \;\text{ e }\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (4,-5,0,1).$$

Mediante il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt si ottiene il vettore

$$(4,-5,0,1) - \frac{(4,-5,0,1)\cdot(2,-2,1,0)}{\|(2,-2,1,0)\|^2}(2,-2,1,0) = (4,-5,0,1) - 2\,(2,-2,1,0) = (0,-1,-2,1),$$

quindi $\{\,(2,-2,1,0),(0,1,2,-1)\,\}$ è una base ortogonale di $U^\perp \cap V$.

(c) Poiché U ha dimensione uno e $\mathbb{R}^4$ è somma diretta ortogonale di U e $U^\perp$, se $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in U^\perp$, u è uguale a

$$\frac{(2,5,-3,-7)\cdot(2,1,-2,-3)}{\|(2,1,-2,-3)\|^2}(2,1,-2,-3) = \frac{36}{18}(2,1,-2,-3) = (4,2,-4,-6),$$

quindi $w = v - u = (2,5,-3,-7) - (4,2,-4,-6) = (-2,3,1,-1)$.

(d) Chiaramente $L = <\overrightarrow{w'v}>$, con $\overrightarrow{w'v} = (2,5,-3,-7) - (1,1,3,-1) = (1,4,-6,-6)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, sia r la retta passante per il punto $(3,-2,3)$ e parallela al vettore $(t,-1,1)$, e sia π il piano di equazione $x + 2y - z + 4 = 0$.

(a) Si determini il valore di t per il quale la retta r è contenuta nel piano π. Per tale valore di t, si determini l'equazione cartesiana del piano σ, contenente la retta r, che forma un angolo retto con il piano π.

(b) Si determini la proiezione ortogonale A' del punto $A = (2,5,-2)$ sul piano π e la distanza di A' dalla retta r.

(c) Si determini il raggio della circonferenza ottenuta dall'intersezione della sfera di raggio 3 centrata nell'origine con il piano π.

Soluzione (a) Imponendo alla direzione $<(t,-1,1)>$ della retta r di essere inclusa nella direzione di equazione $x + 2y - z = 0$ del piano π, si ottiene $t = 3$ e quindi la retta r ha equazione parametrica $(3,-2,3) + <(3,-1,1)>$. La direzione del piano σ deve contenere la direzione $<(3,-1,1)>$ della retta r e la direzione $<(1,2,-1)>$ ortogonale alla direzione del piano π. Appartenendogli il punto $(3,-2,3)$, il piano σ ha equazione parametrica

$$(3,-2,3) + <(3,-1,1),(1,2,-1)>.$$

Essendo $(1,2,-1)\times(3,-1,1)=(1,-4,-7)$ ortogonale ai vettori $(3,-1,1)$, $(1,2,-1)$, un'equazione cartesiana del piano σ è $x-4y-7z=(1,-4,-7)\cdot(3,-2,3)=-10$.
(b) La retta passante per il punto A e ortogonale al piano π ha equazione parametrica

$$(2,5,-2)+<(1,2,-1)>,$$

la cui intersezione col piano è il punto

$$A'=(2,5,-2)+\frac{-4-(1,2,-1)\cdot(2,5,-2)}{\|(1,2,-1)\|^2}(1,2,-1)=(2,5,-2)-3\,(1,2,-1)=(-1,-1,1\,).$$

Il vettore, che porta A' nel punto $(3,-2,3)$ della retta r, è $(4,-1,2)$. Di conseguenza si ha

$$\mathrm{d}(A',r)=\frac{\|(4,-1,2)\times(3,-1,1)\|}{\|(3,-1,1)\|}=\sqrt{\frac{\|(1,2,1)\|^2}{11}}=\sqrt{\frac{6}{11}}.$$

(c) La ben nota formula per la distanza di un punto da un piano, del quale è nota un'equazione, dà $\mathrm{d}((0,0,0),\pi)=\dfrac{4}{\sqrt{6}}$. Di conseguenza il raggio della circonferenza è $\sqrt{9-\dfrac{16}{6}}=\sqrt{\dfrac{19}{3}}$.

Molti studenti svolgono la prova scritta d'esame con un eccesso di calcoli e non nella maniera più veloce. Ad esempio verificano l'indipendenza lineare di alcuni vettori a partire dalla definizione, giungendo a dei sistemi lineari, che spesso risolvono a mano. Ciò li conduce a scrivere troppo, impegnare inutilmente gran parte del foglio intestato a loro disposizione e ad aumentare la probabilità di errori. Anche il metodo di eliminazione di Gauss, seppure semplice ed elegante, è ingombrante e possibilmente non dovrebbe essere utilizzato, come avviene nei punti (a) e (b) della soluzione del primo esercizio. Il quesito (c) dello stesso esercizio, nel quali si tratta di determinare l'intersezione di un iperpiano di $\mathbb{R}^4$ con un sottospazio vettoriale di dimensione 2, ha indotto alcuni studenti a uguagliare due combinazioni lineari, giungendo ad un sistema lineare con cinque indeterminate, in contrasto con la semplicissima soluzione naturale. Anche avendo due sottospazi vettoriali, dati mediante insiemi di generatori, può convenire scrivere delle equazioni di uno di essi.
Nel caso di due sottospazi vettoriali distinti $U=<u_1,u_2>$ e $V=<v_1,v_2>$ di $\mathbb{R}^3$, entrambi di dimensione due, grazie alla presenza del prodotto vettoriale, si può addirittura scrivere una formula poco nota per la loro intersezione. Un'equazione cartesiana di U è data dal prodotto misto $u_1\times u_2\cdot(x,y,z)=0$. Uno dei due vettori della base data di V, essendo U e V distinti, non appartiene a U, quindi non è restrittivo supporre che sia v_2 un tale vettore. Essendo i vettori u_1, u_2 e v_2 linearmente indipendenti, il prodotto misto $u_1\times u_2\cdot v_2$ è diverso da zero e il vettore

$$v_1-\frac{u_1\times u_2\cdot v_1}{u_1\times u_2\cdot v_2}v_2$$

di V appartiene anche U, quindi a $U\cap V$, che, avendo dimensione uno, è da questo generato. Infatti

$$u_1\times u_2\cdot\left(v_1-\frac{u_1\times u_2\cdot v_1}{u_1\times u_2\cdot v_2}v_2\right)=u_1\times u_2\cdot v_1-\frac{u_1\times u_2\cdot v_1}{u_1\times u_2\cdot v_2}\,u_1\times u_2\cdot v_2=0.$$

A titolo di esempio, dati i sottospazi vettoriali $U=<(1,2,3),(3,1,2)>$ e $V=<(2,1,2),(1,0,1)>$ di $\mathbb{R}^3$, si ha $(1,2,3)\times(3,1,2)=(1,7,-5)$ e il vettore

$$(2,1,2)-\frac{(1,7,-5)\cdot(2,1,2)}{(1,7,-5)\cdot(1,0,1)}(1,0,1)=(2,1,2)-\frac{1}{4}(1,0,1)=\frac{1}{4}(7,4,7)$$

di V appartiene a U e quindi $U\cap V=<(7,4,7)>$.
Per quanto concerne il secondo esercizio, pochissimi studenti hanno svolto il punto (d), forse ritenendo di avere già risposto nel quesito precedente. Così non è poiché, per $t=-1$, u_{-1} appartiene al nucleo di f_{-1} e la terna costituita da u_{-1}, seguito da due vettori del nucleo di f_{-1}, non è una base di $\mathbb{R}^3$.
Nel punto (b) del terzo esercizio pochissimi studenti, ma dotati di molta fantasia, hanno ideato la complicazione di determinare l'intersezione $U^\perp\cap V$ uguagliando due combinazioni lineari di basi degli spazi rispettivi, anziché risolvere un semplicissimo sistema omogeneo.
Nel punto (c) costruire una base ortogonale di $U^\perp$ mediante il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt per scrivere w è estremamente più complicato che scrivere la componente di v in U, che ha dimensione uno, e poi determinare w come differenza di due vettori.
Qualcuno non ha compreso il testo del quesito (d), sprecando 2 punti di valutazione.