

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

2° Appello — 7 luglio 2015

Esercizio 1. Si scriva l'unica matrice simmetrica A di rango 1 che ha $(-2, -6, 4)$ come ultima riga.

- (a) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di A .
 (b) Si scrivano due matrici ortogonali distinte P e R tali che

$$A = PDP^{-1} \text{ e } A = RDR^{-1},$$

dove D è una matrice diagonale [**Attenzione:** P e R devono essere diverse non solo per il cambiamento di segno di alcuni coefficienti!]

- (c) Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \alpha I$ è invertibile. Si determini il valore di α in modo tale che la matrice inversa di $A - \alpha I$ sia

$$B = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -12 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & -6 \\ -2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si considerino gli spazi vettoriali $V = \mathbb{R}^3$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $W = \mathbb{R}^2$ con la base $\{w_1 = (2, -1), w_2 = (1, 1)\}$. Sia $f: V \rightarrow W$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi date, è

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & t \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) Si scriva la matrice B di f rispetto alle basi canoniche di V e di W .
 (b) Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
 (c) Si dica per quale valore di t esiste una base $\{w'_1, w'_2\}$ di W tale che la matrice C di f rispetto alla base canonica di V e alla base $\{w'_1, w'_2\}$ di W abbia la prima riga nulla. Si dia un esempio di una base siffatta.
 (d) Si dica se, per qualche valore di t , esiste una matrice D tale che $AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$.

- (a) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (3, -4, 4, -5)$ sul sottospazio U .
 (b) Sia $U' \subset U$ il sottospazio vettoriale formato da tutti i vettori di U che sono ortogonali al vettore $w = (2, 0, -1, 1)$. Si determini una base di U' .
 (c) Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 1, tale che il vettore $v' = (3, 0, t, 0)$ sia la proiezione ortogonale di v su L .
 (d) Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che a ogni vettore di \mathbb{R}^4 associa la sua proiezione ortogonale su U . Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f è diagonalizzabile (si può rispondere senza calcolare la matrice di f).

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ 2x - z - 5 = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} (2-t)x + y - z + t = 0 \\ tx - y - 3 - t = 0 \end{cases}$$

- (a) Si dica per quali valori di t le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.
 (b) Per il valore di t per il quale r e s sono parallele, si scriva l'equazione cartesiana del piano che le contiene.
 (c) Dopo aver posto $t = -1$ si consideri il punto $P = (10, 10, 13)$. Si determini un punto $R \in r$ tale che la retta passante per P e R intersechi la retta s in un punto S . Si determinino inoltre le coordinate di tale punto S .

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

2° Appello — 7 luglio 2015

Esercizio 1. Si scriva l'unica matrice simmetrica A di rango 1 che ha $(2, 4, -2)$ come seconda riga.

- (a) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di A .
 (b) Si scrivano due matrici ortogonali distinte P e R tali che

$$A = PDP^{-1} \text{ e } A = RDR^{-1},$$

dove D è una matrice diagonale [**Attenzione:** P e R devono essere diverse non solo per il cambiamento di segno di alcuni coefficienti!]

- (c) Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \alpha I$ è invertibile. Si determini il valore di α in modo tale che la matrice inversa di $A - \alpha I$ sia

$$B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si considerino gli spazi vettoriali $V = \mathbb{R}^3$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $W = \mathbb{R}^2$ con la base $\{w_1 = (3, 1), w_2 = (1, 2)\}$. Sia $f: V \rightarrow W$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi date, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -3 & t & 9 \end{pmatrix}$$

- (a) Si scriva la matrice B di f rispetto alle basi canoniche di V e di W .
 (b) Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
 (c) Si dica per quale valore di t esiste una base $\{w'_1, w'_2\}$ di W tale che la matrice C di f rispetto alla base canonica di V e alla base $\{w'_1, w'_2\}$ di W abbia la prima riga nulla. Si dia un esempio di una base siffatta.
 (d) Si dica se, per qualche valore di t , esiste una matrice D tale che $AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$.

- (a) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (4, -5, -3, 5)$ sul sottospazio U .
 (b) Sia $U' \subset U$ il sottospazio vettoriale formato da tutti i vettori di U che sono ortogonali al vettore $w = (1, 2, 0, -1)$. Si determini una base di U' .
 (c) Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 1, tale che il vettore $v' = (0, -5, 0, t)$ sia la proiezione ortogonale di v su L .
 (d) Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che a ogni vettore di \mathbb{R}^4 associa la sua proiezione ortogonale su U . Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f è diagonalizzabile (si può rispondere senza calcolare la matrice di f).

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z + 4 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + (t+3)y - z - 1 = 0 \\ x + ty - 2 = 0 \end{cases}$$

- (a) Si dica per quali valori di t le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.
 (b) Per il valore di t per il quale r e s sono parallele, si scriva l'equazione cartesiana del piano che le contiene.
 (c) Dopo aver posto $t = -2$ si consideri il punto $P = (-14, 7, -2)$. Si determini un punto $R \in r$ tale che la retta passante per P e R intersechi la retta s in un punto S . Si determinino inoltre le coordinate di tale punto S .

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

2° Appello — 7 luglio 2015

Esercizio 1. Si scriva l'unica matrice simmetrica A di rango 1 che ha $(3, -6, 9)$ come ultima riga.

- (a) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di A .
 (b) Si scrivano due matrici ortogonali distinte P e R tali che

$$A = PDP^{-1} \text{ e } A = RDR^{-1},$$

dove D è una matrice diagonale [**Attenzione:** P e R devono essere diverse non solo per il cambiamento di segno di alcuni coefficienti!]

- (c) Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \alpha I$ è invertibile. Si determini il valore di α in modo tale che la matrice inversa di $A - \alpha I$ sia

$$B = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 14 & 2 & -3 \\ 2 & 11 & 6 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si considerino gli spazi vettoriali $V = \mathbb{R}^3$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $W = \mathbb{R}^2$ con la base $\{w_1 = (2, -3), w_2 = (2, 1)\}$. Sia $f: V \rightarrow W$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi date, è

$$A = \begin{pmatrix} t & 6 & 4 \\ 3 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$

- (a) Si scriva la matrice B di f rispetto alle basi canoniche di V e di W .
 (b) Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
 (c) Si dica per quale valore di t esiste una base $\{w'_1, w'_2\}$ di W tale che la matrice C di f rispetto alla base canonica di V e alla base $\{w'_1, w'_2\}$ di W abbia la prima riga nulla. Si dia un esempio di una base siffatta.
 (d) Si dica se, per qualche valore di t , esiste una matrice D tale che $AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$.

- (a) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (4, 5, -2, 6)$ sul sottospazio U .
 (b) Sia $U' \subset U$ il sottospazio vettoriale formato da tutti i vettori di U che sono ortogonali al vettore $w = (2, -1, 1, 0)$. Si determini una base di U' .
 (c) Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 1, tale che il vettore $v' = (4, 0, 0, t)$ sia la proiezione ortogonale di v su L .
 (d) Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che a ogni vettore di \mathbb{R}^4 associa la sua proiezione ortogonale su U . Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f è diagonalizzabile (si può rispondere senza calcolare la matrice di f).

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + y - (t + 3)z + t + 2 = 0 \\ x - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

- (a) Si dica per quali valori di t le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.
 (b) Per il valore di t per il quale r e s sono parallele, si scriva l'equazione cartesiana del piano che le contiene.
 (c) Dopo aver posto $t = 2$ si consideri il punto $P = (21, 0, 10)$. Si determini un punto $R \in r$ tale che la retta passante per P e R intersechi la retta s in un punto S . Si determinino inoltre le coordinate di tale punto S .

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

2° Appello — 7 luglio 2015

Esercizio 1. Si scriva l'unica matrice simmetrica A di rango 1 che ha $(2, 4, -4)$ come seconda riga.

- (a) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di A .
 (b) Si scrivano due matrici ortogonali distinte P e R tali che

$$A = PDP^{-1} \text{ e } A = RDR^{-1},$$

dove D è una matrice diagonale [**Attenzione:** P e R devono essere diverse non solo per il cambiamento di segno di alcuni coefficienti!]

- (c) Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \alpha I$ è invertibile. Si determini il valore di α in modo tale che la matrice inversa di $A - \alpha I$ sia

$$B = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si considerino gli spazi vettoriali $V = \mathbb{R}^3$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $W = \mathbb{R}^2$ con la base $\{w_1 = (2, 1), w_2 = (-1, 3)\}$. Sia $f: V \rightarrow W$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi date, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -1 & t & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Si scriva la matrice B di f rispetto alle basi canoniche di V e di W .
 (b) Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
 (c) Si dica per quale valore di t esiste una base $\{w'_1, w'_2\}$ di W tale che la matrice C di f rispetto alla base canonica di V e alla base $\{w'_1, w'_2\}$ di W abbia la prima riga nulla. Si dia un esempio di una base siffatta.
 (d) Si dica se, per qualche valore di t , esiste una matrice D tale che $AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0$.

- (a) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (5, 7, -4, -4)$ sul sottospazio U .
 (b) Sia $U' \subset U$ il sottospazio vettoriale formato da tutti i vettori di U che sono ortogonali al vettore $w = (0, 1, -2, 1)$. Si determini una base di U' .
 (c) Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 1, tale che il vettore $v' = (0, t, -4, 0)$ sia la proiezione ortogonale di v su L .
 (d) Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che a ogni vettore di \mathbb{R}^4 associa la sua proiezione ortogonale su U . Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f è diagonalizzabile (si può rispondere senza calcolare la matrice di f).

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x + 4y - z - 7 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + (t+2)y - z + t - 3 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

- (a) Si dica per quali valori di t le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.
 (b) Per il valore di t per il quale r e s sono parallele, si scriva l'equazione cartesiana del piano che le contiene.
 (c) Dopo aver posto $t = -1$ si consideri il punto $P = (11, -2, -1)$. Si determini un punto $R \in r$ tale che la retta passante per P e R intersechi la retta s in un punto S . Si determinino inoltre le coordinate di tale punto S .