A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, N. Rodinò, R. Sánchez

3º Appello — 7 settembre 2015

Esercizio 1. Sia $V = M_2$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 e poniamo $u = (1, -2)$.

(a) Si determini la dimensione e una base del sottospazio $U = \{A \in M_2 \mid u \in \mathrm{Ker}(A)\}$.

(b) Si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale di V generato dalle matrici $A \in M_2$ tali che la somma dei due elementi sulla diagonale principale di A è 0, mentre la somma degli altri due elementi è 1.

(c) Dato un numero reale h, poniamo $A_h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & h \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale $W_h = \{B \in M_2 \mid A_h B = B A_h\}$.

(d) Si dica se i seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi vettoriali oppure no (le risposte devono essere adeguatamente giustificate):

$$U_1 = \{A \in M_2 \mid \mathrm{rango}(A) \leq 1\}, \quad U_2 = \{A \in M_2 \mid \dim \mathrm{Ker}(A) = 1\}, \quad U_3 = \{A \in M_2 \mid \det(A) = 0\}.$$

Esercizio 2. Siano $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni lineari le cui matrici, rispetto alle basi canoniche, sono

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Sia $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = g(x, y)\}$. Si verifichi che U è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ e se ne determini una base.

(b) Definiamo una funzione lineare $h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ponendo $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a, b, c, d)$, ove $(a, b) = f(x_1, x_2)$ e $(c, d) = g(x_3, x_4)$. Si scriva la matrice di h rispetto alla base canonica e si dica se h è iniettiva. È corretto affermare che $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$? (la risposta deve essere adeguatamente giustificata).

(c) Si determinino gli autovalori di h. Si determini poi una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di h sia diagonale.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u = (3, 3, 0, t-2)$ e $u' = (2, 0, -1, 1)$.

(a) Si dica per quale valore di t esiste un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 3, tale che u' sia la proiezione ortogonale di u su V. Si scriva inoltre un'equazione cartesiana di tale sottospazio V.

(b) Siano $v_1 = (2, -1, 3, 1)$, $v_2 = (1, 2, -1, 2)$ e si consideri il sottospazio $U = \langle v_1 \rangle^\perp \cap \langle v_2 \rangle^\perp$. Si scriva una base ortogonale di U.

(c) Si consideri ora il vettore $v = (1, 3, 4, 3)$. Si determini il vettore w di norma minima tale che $v + w \in U$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette $r : \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t + 2 \\ z = t + 1 \end{cases}$

(a) Si dica se r e s sono complanari oppure sghembe.

(b) Si determinino le equazioni (parametriche o cartesiane) della retta ℓ passante per il punto $P = (-1, 9, 4)$ e incidente le rette r e s.

(c) Si determinino i punti di minima distanza delle rette r e s.

(d) Si determini il centro e il raggio di una sfera $\mathcal{S}$ tale che le rette r e s siano tangenti a $\mathcal{S}$.

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, N. Rodinò, R. Sánchez

3$^{\text{o}}$ Appello — 7 settembre 2015

Esercizio 1. Sia $V = M_2$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 e poniamo $u = (1, -3)$.

(a) Si determini la dimensione e una base del sottospazio $U = \{A \in M_2 \mid u \in \mathrm{Ker}(A)\}$.

(b) Si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale di V generato da tutte le matrici $A \in M_2$ tali che la somma dei due elementi sulla diagonale principale di A è 2, mentre la somma degli altri due elementi è 0.

(c) Dato un numero reale h, poniamo $A_h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & h \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale $W_h = \{B \in M_2 \mid A_h B = B A_h\}$.

(d) Si dica se i seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi vettoriali oppure no (le risposte devono essere adeguatamente giustificate):

$$U_1 = \{A \in M_2 \mid \mathrm{rango}(A) \leq 1\}, \quad U_2 = \{A \in M_2 \mid \dim \mathrm{Ker}(A) = 1\}, \quad U_3 = \{A \in M_2 \mid \det(A) = 0\}.$$

Esercizio 2. Siano $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni lineari le cui matrici, rispetto alle basi canoniche, sono

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Sia $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = -3g(x, y)\}$. Si verifichi che U è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ e se ne determini una base.

(b) Definiamo una funzione lineare $h \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ponendo $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a, b, c, d)$, ove $(a, b) = f(x_1, x_2)$ e $(c, d) = g(x_3, x_4)$. Si scriva la matrice di h rispetto alla base canonica e si dica se h è iniettiva. È corretto affermare che $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$? (la risposta deve essere adeguatamente giustificata).

(c) Si determinino gli autovalori di h. Si determini poi una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di h sia diagonale.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u = (3, t + 1, 2, 2)$ e $u' = (1, -2, 3, 1)$.

(a) Si dica per quale valore di t esiste un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 3, tale che u' sia la proiezione ortogonale di u su V. Si scriva inoltre un'equazione cartesiana di tale sottospazio V.

(b) Siano $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (2, -1, 1, 2)$ e si consideri il sottospazio $U = \langle v_1 \rangle^{\perp} \cap \langle v_2 \rangle^{\perp}$. Si scriva una base ortogonale di U.

(c) Si consideri ora il vettore $v = (5, 0, -4, 3)$. Si determini il vettore w di norma minima tale che $v + w \in U$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette $r : \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases}$

(a) Si dica se r e s sono complanari oppure sghembe.

(b) Si determinino le equazioni (parametriche o cartesiane) della retta ℓ passante per il punto $P = (8, -10, 8)$ e incidente le rette r e s.

(c) Si determinino i punti di minima distanza delle rette r e s.

(d) Si determini il centro e il raggio di una sfera $\mathcal{S}$ tale che le rette r e s siano tangenti a $\mathcal{S}$.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, N. Rodinò, R. Sánchez

3º Appello — 7 settembre 2015

Esercizio 1. Sia $V = M_2$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 e poniamo $u = (2, 3)$.

(a) Si determini la dimensione e una base del sottospazio $U = \{A \in M_2 \mid u \in \mathrm{Ker}(A)\}$.

(b) Si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale di V generato dalle matrici $A \in M_2$ tali che la somma dei due elementi sulla diagonale principale di A è 0, mentre la somma degli altri due elementi è 4.

(c) Dato un numero reale h, poniamo $A_h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & h \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale $W_h = \{B \in M_2 \mid A_h B = B A_h\}$.

(d) Si dica se i seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi vettoriali oppure no (le risposte devono essere adeguatamente giustificate):

$$U_1 = \{A \in M_2 \mid \mathrm{rango}(A) \leq 1\}, \quad U_2 = \{A \in M_2 \mid \dim \mathrm{Ker}(A) = 1\}, \quad U_3 = \{A \in M_2 \mid \det(A) = 0\}.$$

Esercizio 2. Siano $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni lineari le cui matrici, rispetto alle basi canoniche, sono

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Sia $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = g(x, y)\}$. Si verifichi che U è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ e se ne determini una base.

(b) Definiamo una funzione lineare $h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ponendo $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a, b, c, d)$, ove $(a, b) = f(x_1, x_2)$ e $(c, d) = g(x_3, x_4)$. Si scriva la matrice di h rispetto alla base canonica e si dica se h è iniettiva. È corretto affermare che $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$? (la risposta deve essere adeguatamente giustificata).

(c) Si determinino gli autovalori di h. Si determini poi una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di h sia diagonale.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u = (4, t + 1, -3, 2)$ e $u' = (3, -2, 0, 1)$.

(a) Si dica per quale valore di t esiste un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 3, tale che u' sia la proiezione ortogonale di u su V. Si scriva inoltre un'equazione cartesiana di tale sottospazio V.

(b) Siano $v_1 = (3, 1, 2, -1)$, $v_2 = (0, 2, 1, 1)$ e si consideri il sottospazio $U = \langle v_1 \rangle^\perp \cap \langle v_2 \rangle^\perp$. Si scriva una base ortogonale di U.

(c) Si consideri ora il vettore $v = (2, 0, 1, -4)$. Si determini il vettore w di norma minima tale che $v + w \in U$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette $r : \begin{cases} 2x + y - 3z - 5 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$

(a) Si dica se r e s sono complanari oppure sghembe.

(b) Si determinino le equazioni (parametriche o cartesiane) della retta ℓ passante per il punto $P = (7, 2, -1)$ e incidente le rette r e s.

(c) Si determinino i punti di minima distanza delle rette r e s.

(d) Si determini il centro e il raggio di una sfera $\mathcal{S}$ tale che le rette r e s siano tangenti a $\mathcal{S}$.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, N. Rodinò, R. Sánchez

3º Appello — 7 settembre 2015

Esercizio 1. Sia $V = M_2$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 e poniamo $u = (1, 4)$.

(a) Si determini la dimensione e una base del sottospazio $U = \{A \in M_2 \mid u \in \mathrm{Ker}(A)\}$.

(b) Si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale di V generato dalle matrici $A \in M_2$ tali che la somma dei due elementi sulla diagonale principale di A è 3, mentre la somma degli altri due elementi è 0.

(c) Dato un numero reale h, poniamo $A_h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & h \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right)$. Si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale $W_h = \{B \in M_2 \mid A_h B = B A_h\}$.

(d) Si dica se i seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi vettoriali oppure no (le risposte devono essere adeguatamente giustificate):

$$U_1 = \{A \in M_2 \mid \mathrm{rango}(A) \leq 1\}, \quad U_2 = \{A \in M_2 \mid \dim \mathrm{Ker}(A) = 1\}, \quad U_3 = \{A \in M_2 \mid \det(A) = 0\}.$$

Esercizio 2. Siano $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni lineari le cui matrici, rispetto alle basi canoniche, sono

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Sia $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = g(x, y)\}$. Si verifichi che U è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ e se ne determini una base.

(b) Definiamo una funzione lineare $h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ponendo $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a, b, c, d)$, ove $(a, b) = f(x_1, x_2)$ e $(c, d) = g(x_3, x_4)$. Si scriva la matrice di h rispetto alla base canonica e si dica se h è iniettiva. È corretto affermare che $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$? (la risposta deve essere adeguatamente giustificata).

(c) Si determinino gli autovalori di h. Si determini poi una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di h sia diagonale.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u = (4, -3, -2, t + 2)$ e $u' = (2, -3, 1, -1)$.

(a) Si dica per quale valore di t esiste un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 3, tale che u' sia la proiezione ortogonale di u su V. Si scriva inoltre un'equazione cartesiana di tale sottospazio V.

(b) Siano $v_1 = (1, -2, 1, -3)$, $v_2 = (2, 1, 0, -1)$ e si consideri il sottospazio $U = \langle v_1 \rangle^{\perp} \cap \langle v_2 \rangle^{\perp}$. Si scriva una base ortogonale di U.

(c) Si consideri ora il vettore $v = (0, 5, 4, 2)$. Si determini il vettore w di norma minima tale che $v + w \in U$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette $r : \begin{cases} 2x + y + 2z - 3 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t + 1 \end{cases}$

(a) Si dica se r e s sono complanari oppure sghembe.

(b) Si determinino le equazioni (parametriche o cartesiane) della retta ℓ passante per il punto $P = (8, -9, 9)$ e incidente le rette r e s.

(c) Si determinino i punti di minima distanza delle rette r e s.

(d) Si determini il centro e il raggio di una sfera $\mathcal{S}$ tale che le rette r e s siano tangenti a $\mathcal{S}$.