A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, N. Rodinò, R. Sánchez

4$^{\text{o}}$ Appello — 5 febbraio 2016

Esercizio 1. Indichiamo con $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, sia V il sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici A, B e AB.

(a) Si determini la dimensione di V.

(b) Si dica per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ esiste una base di V che contiene la matrice $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & t \end{pmatrix}$.

(c) Sia $S \subset M_2(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale formato dalle matrici simmetriche. Si determini una base di $V \cap S$ e una base di $V + S$.

(d) Si determini, se possibile, un sottospazio vettoriale $W \subset M_2(\mathbb{R})$ tale che si abbia $V \oplus W = M_2(\mathbb{R})$ e anche $S \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Siano dati i vettori $v_1 = (0, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (-1, 1, 0)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(v_1) = -3v_1$, $f(v_2) = v_2$, $f(v_3) = v_3 - 2v_2$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica.

(c) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f diagonalizzabile.

(d) Si verifichi che gli autospazi di f sono in somma diretta.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (2, 2, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, -4, -1)$.

(a) Dato il vettore $v = (3, -2, 1, 2)$ si determini la sua proiezione ortogonale su U.

(b) Si determini una base ortogonale di U.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale $f(v)$ sul sottospazio U. Si determini una base del nucleo di f.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sono dati i punti $A = (1, -1, 0)$, $B = (2, 1, 1)$, $C = (0, 2, 2)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.

(b) Dato il punto $D = (5, -3, 12)$, si determini la sua proiezione ortogonale H sul piano π.

(c) Si verifichi che il punto H appartiene alla retta passante per A e B.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, N. Rodinò, R. Sánchez

4º Appello — 5 febbraio 2016

Esercizio 1. Indichiamo con $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2. Date le matrici $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $B = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, sia V il sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici A, B e AB.

(a) Si determini la dimensione di V.

(b) Si dica per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ esiste una base di V che contiene la matrice $C = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -7 \\ t & -3 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Sia $S \subset M_2(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale formato dalle matrici simmetriche. Si determini una base di $V \cap S$ e una base di $V + S$.

(d) Si determini, se possibile, un sottospazio vettoriale $W \subset M_2(\mathbb{R})$ tale che si abbia $V \oplus W = M_2(\mathbb{R})$ e anche $S \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Siano dati i vettori $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (-2, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 2)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 3v_2$, $f(v_3) = 3v_3 + v_2$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica.

(c) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f diagonalizzabile.

(d) Si verifichi che gli autospazi di f sono in somma diretta.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (1, -2, 0, 2)$, $u_2 = (0, 0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 4, 0)$.

(a) Dato il vettore $v = (2, -3, 1, -2)$ si determini la sua proiezione ortogonale su U.

(b) Si determini una base ortogonale di U.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale $f(v)$ sul sottospazio U. Si determini una base del nucleo di f.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sono dati i punti $A = (0, 1, -1)$, $B = (2, 2, 1)$, $C = (1, 3, 0)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.

(b) Dato il punto $D = (6, 3, 1)$, si determini la sua proiezione ortogonale H sul piano π.

(c) Si verifichi che il punto H appartiene alla retta passante per A e B.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

4° Appello — 5 febbraio 2016

Esercizio 1. Indichiamo con $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, sia V il sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici A, B e AB.

(a) Si determini la dimensione di V.

(b) Si dica per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ esiste una base di V che contiene la matrice $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Sia $S \subset M_2(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale formato dalle matrici simmetriche. Si determini una base di $V \cap S$ e una base di $V + S$.

(d) Si determini, se possibile, un sottospazio vettoriale $W \subset M_2(\mathbb{R})$ tale che si abbia $V \oplus W = M_2(\mathbb{R})$ e anche $S \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Siano dati i vettori $v_1 = (2, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (0, -1, 1)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(v_1) = -2v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3) = 2v_3 - v_2$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica.

(c) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f diagonalizzabile.

(d) Si verifichi che gli autospazi di f sono in somma diretta.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (2, -2, 0, 1)$, $u_2 = (1, 0, -1, 0)$, $u_3 = (0, 1, -4, 1)$.

(a) Dato il vettore $v = (3, 1, 2, -1)$ si determini la sua proiezione ortogonale su U.

(b) Si determini una base ortogonale di U.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale $f(v)$ sul sottospazio U. Si determini una base del nucleo di f.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sono dati i punti $A = (2, 0, 1)$, $B = (1, 1, -1)$, $C = (3, -2, 0)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.

(b) Dato il punto $D = (-2, -4, 4)$, si determini la sua proiezione ortogonale H sul piano π.

(c) Si verifichi che il punto H appartiene alla retta passante per A e B.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

4o Appello — 5 febbraio 2016

Esercizio 1. Indichiamo con $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sia V il sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici A, B e AB.

(a) Si determini la dimensione di V.

(b) Si dica per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ esiste una base di V che contiene la matrice $C = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -6 & t \end{pmatrix}$.

(c) Sia $S \subset M_2(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale formato dalle matrici simmetriche. Si determini una base di $V \cap S$ e una base di $V + S$.

(d) Si determini, se possibile, un sottospazio vettoriale $W \subset M_2(\mathbb{R})$ tale che si abbia $V \oplus W = M_2(\mathbb{R})$ e anche $S \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Siano dati i vettori $v_1 = (-1, 1, 2)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 3, 0)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3) = 2v_3 - 2v_2$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica.

(c) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f diagonalizzabile.

(d) Si verifichi che gli autospazi di f sono in somma diretta.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (-2, 2, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0, 1)$, $u_3 = (0, 1, -1, 4)$.

(a) Dato il vettore $v = (1, -3, 1, -2)$ si determini la sua proiezione ortogonale su U.

(b) Si determini una base ortogonale di U.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale $f(v)$ sul sottospazio U. Si determini una base del nucleo di f.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sono dati i punti $A = (3, 1, 0)$, $B = (4, 3, 1)$, $C = (2, 2, 1)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.

(b) Dato il punto $D = (2, -5, 1)$, si determini la sua proiezione ortogonale H sul piano π.

(c) Si verifichi che il punto H appartiene alla retta passante per A e B.